第一章 绪 论

积分方程是指在积分号下出现未知函数的方程. 未知函数以线性(一次)形式出现的称为线性积分方程,否则,就称为非线性积分方程.

§1 发展历史概述

微分方程是从I. Newton第二运动定律开始而得到迅速发展的,与此相比,积分方程作为数学学科的一个分支,发展稍迟些,在十九世纪三十、四十年代,才零星地露面,有时只是作为微分方程问题的另一种阐述方式.直到十九世纪最后几年,才由瑞典数学家I. Fredholm和意大利数学家V. Volterra成功地开创了两种类型线性积分方程理论的先河.从此以后,这两类积分方程就以他们的名字命名,积分方程也就成为数学分析方面的一个重要方向,不少数学家致力于这个方向的研究,作出了各种创造性的推广.应用也随之大量涌现.

积分方程如同微分方程一样,起源于物理问题. 积分方程的初次出现,是在1823年,N. H. Abel提出了在地球引力场中一个质点的下落问题:在一个垂直平面内,求一个质点在垂直等加速条件下下落所经的路径,使其下落的时间总是等于下落距离h的已知函数$T(h)$. Abel从下落质点的动能和位能之间的关系着手研究这一问题. 如果质点在没有摩擦的情况下,从高度h下落到$y<h$,则有

$$\frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2=mg(h-y),$$

其中 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ 是在时刻 t 的切线速度，g 是重力加速度，m 是质点的质量．解出 $\mathrm{d}t$，并且求积，就得到

$$\int_{y=h}^{y=0}\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2g(h-y)}}=T(h).$$

若用 $\mathrm{d}s=-u(y)\,\mathrm{d}y$ 引入一个新的函数 $u(y)$，就得到所谓的 Abel 积分方程

$$\int_0^h\frac{u(y)\,\mathrm{d}y}{\sqrt{2g(h-y)}}=T(h).$$

这是关于未知函数 $u(y)$ 的积分方程．其特点是：积分上限是可变的，在积分号外不出现未知函数 $u(y)$，而且被积函数中 $\frac{1}{\sqrt{2g(h-y)}}$ 在积分上限 $y=h$ 处是奇异的．

这种 Abel 型积分方程，虽然 Abel 本人找到了两种解法，但由于他的方法较为特别，因而在一段时期内不为人们所注意．

1828 年，G. Green 在研究位势理论时得到了现在我们所称的第一种积分方程．J. Liouville 独立于 Abel，在 1832 年解决了一些特殊形式的积分方程，他的最有意义的工作是：表现了某些微分方程的解可以通过解相应的积分方程而得到．

十九世纪中叶，积分方程的主要兴趣是围绕着解位势方程

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

有关的边值问题而展开的，通过位势把边值问题化为积分方程．这些积分方程对于凸区域的情形，由 C. G. Neumann 在 1877 年及以后年间发展的论文中解出来了．后来，H. Poincaré 基于他本人对偏微分方程

$$\Delta u+\lambda u=f(x,\ y)$$

的解的研究，在 1896 年研究了由上列偏微分方程导出的下列形式的积分方程

$$\tilde{u}(x)+\lambda\int_a^b K(x,\ y)\tilde{u}(y)\mathrm{d}y=\psi(x),$$

并且断言，其解是 λ 的亚纯函数.

这里应指出，"积分方程"这个名称是在1888年由P. du B. Reymond 第一个提出来的.

I. Fredholm 吸收了这一时期关于积分方程的各种论述与研究思想，系统地研究了积分方程理论. 1899年，他在给他老师 Mittag-Loffler 的一封信中，提出了如下形式的积分方程：

$$\varphi(x)+\lambda\int_0^1 F(x, y)\varphi(y)\,dy=\xi(x), \tag{1.1}$$

其中 $F(x, y)$ 是定义在正方形 $0\leqslant x, y\leqslant 1$ 上的已知连续函数，$\xi(x)$ 是给定在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的连续函数，而 $\varphi(x)$ 是未知函数. 在这封信中，Fredholm 认为，积分方程 (1.1) 的解可以表示为两个 λ 的整函数的商. 次年，即在1900年，Fredholm 发表了一篇论文[1]，初次建立了与函数 $F(x, y)$ 有关的行列式 $D(\lambda)$ 和 $D(x, y; \lambda)$，证明了它们都是 λ 的整函数. 在这篇论文中，Fredholm 巧妙地证明了：如果 λ 是函数 $D(\lambda)$ 的一个零点，那么，积分方程 (1.1) 的齐次方程

$$\varphi(x)+\lambda\int_0^1 F(x, y)\varphi(y)\,dy=0$$

有不恒等于零的解. 这个结果就是现在一般的积分方程书籍中所说的 Fredholm 第二定理. 1903年，Fredholm 又发表了一篇论文[2]，对积分方程 (1.1) 作了进一步的阐述，他取 $\lambda=1$，证明了如下结果：如果 $D(1)\neq 0$，则有一个且只有一个函数 $\varphi(x)$ 满足积分方程 (1.1)，这个函数就是积分方程的解，它可表为

$$\varphi(x)=\xi(x)-\int_0^1\frac{D(x, y; 1)}{D(1)}\xi(y)\,dy.$$

这就是现在一般的积分方程书籍中所说的 Fredholm 第一定理. 比 I. Fredholm 稍早些，V. Volterra 在研究某个生态平衡问题时提出并讨论了积分上限为可变的积分方程. 从此以后，积分方程吸引着许多数学家的注意，其中包括著名数学家 D. Hilbert, E. Schmidt 等人，都致力于这个学科分支的研究，由此，积分方程的理论得到了迅速的发展.

差不多紧接着 Fredholm 积分方程的理论的出现，与它本质上完全不同的奇异积分方程理论也随之而产生了．这类积分方程是人们从不同角度研究不同问题而提出来的．D. Hilbert 在研究解析函数的某些边值问题时发现了它们[3]，几乎同时，H. Poincaré 在研究潮汐现象时也发现了它们[4]．这类有代表性的奇异积分方程是下列形式的积分方程：

$$A(t)\varphi(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t,\tau)}{\tau-t}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau=\eta(t),\ t\in L, \tag{1.2}$$

其中 L 是平面上的光滑曲线，系数 $A(t)$，自由项 $\eta(t)$ 和 $K(t,\tau)$ 都是曲线弧 L 上按 Hölder 意义连续的已知函数，$\varphi(t)$ 是未知函数．需要注意的是：积分方程 (1.2) 中的积分在一定条件下是按 Cauchy 主值的意义存在．对这类奇异积分方程，苏联学者研究得较为系统、深入，在平面弹性理论中有着广泛的实际应用，专著[5]总结了对这类奇异积分方程的研究成果．本世纪二十年代初，由于研究大气辐射传输问题，又提出了另一类积分区域是无穷的奇异积分方程，其重要例子是下面所列的 Wiener-Hopf 方程：

$$\varphi(x)-\int_0^\infty K(x-y)\varphi(y)\mathrm{d}y=\psi(x)\quad(0\leqslant x<\infty),$$

其中 $K(x)$ 与 $\psi(x)$ 是已知函数．六十多年来，这种奇异积分方程的理论也有很大的发展，并在许多实际问题中有着重要的应用．相应于 Fredholm 定理，对上述两类奇异积分方程有 F. Noether 定理．

§2 主要内容介绍

我们称以下形式的积分方程

$$\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y=\xi(x); \tag{1.3}$$

$$\varphi(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y=\xi(x); \tag{1.4}$$

$$A(x)\varphi(x)+\lambda\int_a^b K(x, y)\varphi(y)\mathrm{d}y=\xi(x) \qquad (1.5)$$

分别为 Fredholm 型第一种、第二种、第三种积分方程，其中 $K(x, y)$ 是定义在矩形区域 $a\leqslant \begin{matrix}x\\y\end{matrix}\leqslant b$ 上的已知连续函数，称为积分方程的核，λ 是参数，系数 $A(x)$ 和自由项 $\xi(x)$ 都是确定在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的已知连续函数，$\varphi(x)$ 是未知函数. 显然，第一种方程和第二种方程是第三种积分方程 (1.5) 当 $A(x)$ 分别为 0 和 1 时的特殊情形，所以上述三种积分方程本质上有区别的只是第一种积分方程 (1.3) 和第二种积分方程 (1.4).

Fredholm 型第二种积分方程 (1.4) 具有下述特性：我们从这种积分方程的结构形式可看到，未知函数 $\varphi(x)$ 在积分号外以相加的形式出现，因之，对它可用迭代法求解. 但是当这种积分方程有特征值问题，即相应的齐次积分方程对某些参数 λ 值有非零解时，这时迭代法就没有意义了. 对于这种积分方程，Fredholm 建立了系统的理论，就是我们所说的 Fredholm 理论.

当积分方程 (1.4) 的核 $K(x, y)$ 不连续时，例如设 $K(x, y)$ 为绝对平方可积，则 Fredholm 的所有结果都可推广，只是证明稍繁复些. 这里，我们特别应指出：如果积分方程 (1.4) 的核 $K(x, y)$ 具有形式

$$K(x, y)=\frac{H(x, y)}{|x-y|^{\alpha}} \quad (0<\alpha<1),$$

其中 $H(x, y)$ 是有界函数，这样的 $K(x, y)$ 称为弱奇性核，对它施行积分运算，并记

$$K^{(p+q)}(x, y)=\int_a^b K^{(p)}(x, t)K^{(q)}(t, s)\mathrm{d}t,$$

$$K^{(1)}(x, y)=K(x, y),$$

那么，只要 $p+q>\frac{1}{1-\alpha}$，就得到一个有界核 $K^{(p+q)}(x, y)$，弱奇性消失了. 因之，具有弱奇性核的积分方程具备有 Fredholm 型积分方程的一切特性和结论.

如果积分方程 (1.3) 和 (1.4) 的核 $K(x, y)$ 具有性质

$$K(x, y)=0, \quad x<y,$$

则它们分别取如下形式:

$$\int_a^x K(x, y)\varphi(y)\mathrm{d}y=\xi(x), \tag{1.6}$$

$$\varphi(x)+\lambda\int_a^b K(x, y)\varphi(y)\mathrm{d}y=\xi(x), \tag{1.7}$$

分别称为 Volterra 型第一种、第二种积分方程，其特点是积分上限是变量. Volterra 型第二种积分方程 (1.7) 和 Fredholm 型第二种积分方程 (1.4) 的本质差别是:前者对于一切 λ 值,总是可用逐次迭代法求解,而后者,已如上述,会出现特征值问题.

所有这些,我们将在第二章里叙述.

Fredholm 型第二种积分方程和 Volterra 型第二种积分方程的理论,可推广到多个未知函数的积分方程组的情形，这时，未知的 $\varphi(x)$ 和已知的 $\xi(x)$ 分别视为是未知函数向量 $\varphi(x)=(\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x))$ 和已知函数向量 $\xi(x)=(\xi_1(x), \cdots, \xi_n(x))$, 而核 $K(x, y)$ 是 $n\times n$ 阶方阵 $(K_{lj}(x, y))_{l, j=1, \cdots, n}$. 于是，我们得到关于 n 个未知函数 $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 的 Fredholm 型积分方程组

$$\varphi_l(x)+\lambda\int_a^b\sum_{j=1}^n K_{lj}(x, y)\varphi_j(y)\mathrm{d}y=\xi_l(x) \quad (l=1, \cdots, n)$$

和 Volterra 型积分方程组

$$\varphi_l(x)+\lambda\int_a^x\sum_{j=1}^n K_{lj}(x, y)\varphi_j(y)\mathrm{d}y=\xi_l(x) \quad (l=1, \cdots, n).$$

也可将它们写成一个向量方程的形式. 在一些假设下，关于一个方程的 Fredholm 诸定理对积分方程组也成立. 此外，在实际应用中还会遇到在积分号下出现共轭未知函数的积分方程，可以将它化为积分方程组的情形来考虑. 从而,Fredholm 理论对这类方程也成立. 这些,将在第三章里论述.

D. Hilbert 和 E. Schmidt 对 Fredholm 型第二种积分方程的理论作了许多深刻而且影响甚大的研究工作，特别是关于对称核积分方程的研究结果在数学物理的大量问题中有着广泛的应

用. 对称核积分方程有着更深一些的性质, 诸如, 对称核积分方程的特征值存在定理、特征函数系的性质以及 Hilbert-Schmidt 展开定理等等. 由于对称核积分方程的按绝对值意义最小的特征值有着重要的力学、物理意义, 因之, 近似求最小特征值的问题也自然引起人们的兴趣. 这些结果, 将在第四章里论述.

至于 Fredholm 型第一种积分方程 (1.3), 直到现在还未建立起系统的理论. 正如从积分方程 (1.3) 本身的构造可看到的, 即使积分方程 (1.3) 的核 $K(x, y)$ 是退化核这种最简单的情形, 这个积分方程也并不总是有解的. 二十世纪初, E. Schmidt 曾致力于这方面的研究, 得到了由积分方程 (1.3) 的核产生的函数关于特征函数系的展开定理. 在核 $K(x, y)$ 的特征函数系是完备的假设下, E. Picard 建立了积分方程 (1.3) 有解的一个充分和必要条件. 在积分方程 (1.3) 有解的前提下, 还可给出其近似解的一种构造方法. 对于 Volterra 型第一种积分方程 (1.6), 在一般情况下, 可以通过求微商的方法把它化为与其等价的 Volterra 型第二种积分方程.

前面提到的 Abel 方程是 Volterra 型第一种积分方程, 但由于其核在积分上限有奇性, 所以对它的求解问题要另外进行讨论.

我们将在第五章里论述有关第一种积分方程的若干结果.

由于实际发展的需要, 非线性积分方程的研究也出现了不少结果, 然而, 对一般的非线性积分方程还缺乏系统的理论, 即使是可解性的讨论也较困难. 研究得较多的是以下形式的所谓 Hammerstein 型非线性积分方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x, y)F(y, \varphi(y))\mathrm{d}y,$$

其中 $K(x, y)$, $F(y, u)$ 都是其变元的已知函数. 从 A. Hammerstein 在 1930 年提出这种类型的积分方程以来, 研究者不乏其人. 近年来, 又出现了化非线性 Fredholm 型积分方程和 Volterra 型积分方程为等价的非线性微分积分方程组的初值问题的研究, 对后者便于用数值方法求解. 关于这些内容, 我们将在第六章中

陈述.

至于奇异积分方程，由于它同 Fredholm 型积分方程有着本质的差别，而且研究方法也迥然不同，不列入本书的范围．我们将另外编写专门著作论述前面提到过的两类常见的奇异积分方程的基本理论、重要应用和有关的近代研究成果．

§3 应用举例

在第1节里所引述的 Abel 方程是 Volterra 型第一种积分方程，在研究一个球状地形里地震震动的传播路线问题中，也出现了这种类型的积分方程．这首先由 G. Herglotz 在 1907 年提出过，后来又由 H. Bateman 在 1910 年独立地提到过．这个问题的解法是把震动的传播速度表示为深度的函数，同时相应地提供关于球状体内层构成情况的信息，分析来自地球表面和地球内部断裂的可能的反射，利用观测数据，就能求出数值解．因此，积分方程对地球物理分析的地震法来说是基本的．地震法已经小规模地用于勘探地壳中的石油层、含盐的岩穹等，它是一种规模较小但经济上颇为重要的方法．

地质学中的一个突出问题是制作地球体内部的精细三维图，这种图在勘探矿藏、预报地震、研究地球的历史演变过程和将来的变化趋势等方面都是有用的．这个问题，当然无法用实验的方法来解决，而只能依靠间接的方法来探讨与研究，除上述地震法以外，还有引力势方法等．所谓引力势方法，是把地球 (E) 视为一个固体，它的质量密度函数 $\rho(x, y, z)$ 可设为有界的和分块连续的，于是这个固体 (E) 在点 $P(x, y, z)$ 的引力势是

$$V_E(P)=\iiint_E \frac{\rho(Q)}{r_{PQ}}\, d_3\Omega_Q,$$

其中 $d_3\Omega_Q$ 表示三维空间的体积元素，r_{PQ} 是点 P 与 Q 间的距离．若能知道地球的每个内点处的 $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)V_E(P)$，

则就立即给出我们所要找的密度函数

$$\rho(P)=-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)V_E(P).$$

但是，在整个地球体 (E) 的内部，我们当然无法测出量

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)V_E(P),$$

然而，运用现代尖端仪器和人造卫星，我们可以精确地得到地球外部点 $P'(x', y', z')$ 处的 $V_E(P')$，这样，我们就得到一个形如

$$V_E(P')=\iiint\limits_{E}\frac{\rho(Q)}{r_{P'Q}}\,d_3\Omega_Q$$

的积分方程，它以地球体内部的密度 $\rho(Q)$ 为未知函数，所以这是 Fredholm 型第一种积分方程.

积分方程之所以能发展成为分析学的一个重要分支，没有哪一个研究领域比位势理论对它的贡献更大. 上述的引力势方法就是一例. L. Euler 与 J. L. Lagrange 和其后的 P. S. Laplace 以及 S. D. Poisson 在力学问题中使用了位势函数，Poisson 用它们解决了电磁学中的一些特殊问题，G. Green 作了推广. Green 是最先对 Laplace 方程提出后来称之为"Dirichlet 问题"的人，他推导出了使他自己成名的积分公式，设想了"Green 函数"，并借助这种函数给出了数据给定在闭曲面上的内、外 Dirichlet 问题的解的积分表达式. 对于数学物理中不少重要问题所提出的关于 Laplace 方程的内、外 Dirichlet 问题和内、外 Neumann 问题，可以分别利用所谓双层位势和单层位势化为待定密度函数的 Fredholm 型第二种积分方程. Green 本人在 1828 年实际上已经对 Dirichlet 问题这样做了，但按他的方法所引出的是 Fredholm 型第一种积分方程. 正如我们指出过的，这种积分方程的理论在今天也是不能令人满意的，Green 当时也意识到了这一点. 正是由于这个原因，物理学家和数学家化了不少时间，才得到我们现在的论述方式，把问题化为 Fredholm 结果能适用的第二种积分方程.

在弹性薄膜振动(线性)模型和气体振荡(线性)模型等物理问

题中出现了波动方程

$$a^2\Delta u(P,\ t)=u_{tt}(P,\ t),\tag{1.8}$$

并伴有边界条件和初始条件的定解问题的求解，这里的

$$\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

是 Laplace 算子．约在十八世纪中叶，D. Bernoulli 利用形如 $u(x,\ t)=v(x)Q(t)$ 的"驻波"解的叠加解决了弦振动方程的混合问题，这就是通常所说的分离变量法．对方程(1.8)也使用分离变量法，就得出空间变量 P 的因子 $v(P)$ 必须满足如下的特征值问题：求方程

$$\Delta v(P)=\lambda v(P)\tag{1.9}$$

在所考虑的区域 R 的边界 ∂R 上满足"齐次"边界条件的非零解 $v(P)$．如果齐次边界条件是 $v(P)|_{\partial R}=0$，则方程(1.9)可转换成积分方程

$$v(P)=-\lambda\iiint\limits_{R}G(P,\ Q)v(Q)d_3\Omega_Q,$$

其中 $G(P,\ Q)$ 就是前面提到的 Green 函数．取遍所有特征值，得出 $v_\lambda(P)$ 和 $Q_\lambda(t)$，以此形成

$$u(P,\ t)=\sum_{\{\lambda\}}v_\lambda(P)Q_\lambda(t),$$

然后决定每个 $Q(t)$ 中的系数，使初始条件得以满足．这时，人们就遇到了一系列的问题，诸如：特征值是否存在，特征函数系 $\{v_\lambda(P)\}$ 具有哪些性质，一个任意函数表示为特征函数系 $\{v_\lambda(P)\}$ 的线性组合的可能性，这种线性组合可能是有限的，可能是可列无限的，也可能是积分形式，等等．这些问题是分离变量法的基础．利用积分方程理论，可以展开对上述诸问题的讨论．这是 D. Hilbert 研究工作中最有价值的成就之一，发表于 1904 年和 1905 年的论文中．

微分方程的初值问题，众所周知，可以化为与其等价的 Volterra 型第二种积分方程．而微分方程的边值问题，一般可以化为 Fredholm 型第二种积分方程来进行研究．

总之，在自然现象中，从宏观世界到微观世界，不少实际问题都是与积分方程相关联的，例如气体动力学的 Brown 运动，弹性理论，物理学和生物学中的遗传现象，量子力学，数理经济学等等，限于篇幅，不能一一列举详述了．感兴趣的读者，可参阅专著[6]、[7]和综合评述论文[8]，在这些专著的书末和论文后面都附有大量的参考文献目录．

上面所说的一些应用举例，将在本书的第七章中展开论述．

第二章 第二种 Fredholm 型积分方程

本章主要讨论如何应用逐次迫近法和 Fredholm 方法，求解第二种 Fredholm 型积分方程以及作为它的特殊形式的 Volterra 型积分方程，同时证明在积分方程理论中占据重要地位的 Fredholm 定理. 此外也适当介绍弱奇性积分方程，并指出 Fredholm 定理对于弱奇性积分方程也是成立的. 这方面主要内容可参阅书[5]、[9]和[10]等.

§1 应用逐次迫近法解第二种 Fredholm 积分方程

考察如下形式的第二种 Fredholm 积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,\ s)\varphi(s)\mathrm{d}s=f(x), \tag{2.1}$$

其中 $\varphi(x)$ 是未知函数，λ 是参数，自由项 $f(x)$ 是$[a,\ b]$上的平方绝对可积函数，即有正常数 D 存在，使得

$$\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x=D^2. \tag{2.2}$$

同时假设核 $K(x,\ s)$ 不仅关于两个变量 $x,\ s$ 平方绝对可积，而且核的绝对值平方对于单变量的积分是一个有界函数，即有正常数 C_1 存在，使得下列积分有界

$$\int_a^b |K(x,\ s)|^2\,\mathrm{d}s<C_1^2. \tag{2.3}$$

现在应用逐次迫近法求积分方程 (2.1) 的解. 为此先将方程(2.1)写成如下形式:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\ s)\varphi(s)\mathrm{d}s, \tag{2.4}$$

然后将自由项$f(x)$作为零次近似解：

$$\varphi_0(x)=f(x).$$

将$\varphi_0(x)$代入方程(2.4)的右端，并把所得的结果作为一次近似解

$$\varphi_1(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\ s)\varphi_0(s)\mathrm{d}s.$$

再将这一近似解代入(2.4)的右端，得到$\varphi_2(x)$，依次类推．一般地，若已得n次近似解$\varphi_n(x)$，则将它代入方程(2.4)的右端，而取所得的结果为$n+1$次近似$\varphi_{n+1}(x)$．于是逐次迫近法由下面的递推关系来确定：

$$\varphi_{n+1}(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\ s)\varphi_n(s)\mathrm{d}s. \tag{2.5}$$

若逐次迫近法所得到的一列近似解一致收敛于某极限，则这个极限函数就是方程(2.1)的解．若极限不存在，则应用逐次迫近法显然无意义．

注意到递推公式(2.5)，我们有

$$\varphi_1(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\ s)f(s)\mathrm{d}s,$$

$$\varphi_2(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\ s)f(s)\mathrm{d}s$$

$$+\lambda^2\int_a^b K(x,\ t)\mathrm{d}t\int_a^b K(t,\ s)f(s)\mathrm{d}s,$$

记
$$K_2(x,\ s)=\int_a^b K(x,\ t)K(t,\ s)\mathrm{d}t,$$

上式又可写成

$$\varphi_2(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\ s)f(s)\mathrm{d}s+\lambda^2\int_a^b K_2(x,\ s)f(s)\mathrm{d}s.$$

依次类推，可得到近似解$\varphi_n(x)$的一般表示式：

$$\varphi_n(x)=f(x)+\sum_{m=1}^{n}\lambda^m\int_a^b K_m(x,\ s)f(s)\mathrm{d}s, \tag{2.6}$$

其中$K_m(x,\ s)$由下面递推关系确定：

$$K_1(x, s)=K(x, s);$$
$$K_m(x, s)=\int_a^b K(x, t)K_{m-1}(t, s)\mathrm{d}t. \tag{2.7}$$

函数 $K_m(x, s)$ 称为核 $K(x, s)$ 的 m 次迭核. 容易证明迭核适合以下的关系式:

$$K_m(x, s)=\int_a^b K_r(x, t)K_{m-r}(t, s)\mathrm{d}t, \tag{2.8}$$

这里 r 是小于 m 的任何自然数.

事实上, 我们用 K_{m-2} 来表示(2.7)中的核 $K_{m-1}(t, s)$, 再代入同一式(2.7)中, 得

$$K_m(x, s)=\int_a^b\int_a^b K(x, t_1)K(t_1, t_2)K_{m-2}(t_2, s)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2.$$

核 $K_{m-2}(t, s)$ 又可用 K_{m-3} 表示之, 等等. 连续这样运算有限次以后, 我们得到下面的表示式:

$$K_m(x, s)=\int_a^b\cdots\int_a^b K(x, t_1)K(t_1, t_2)\cdots K(t_{m-1}, s)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_{m-1}. \tag{2.9}$$

在上式中, 将对于 t_r 的积分提出, 则它又可写成

$$\begin{aligned}K_m(x, s)=\int_a^b \mathrm{d}t_r\Big\{&\int_a^b\cdots\int_a^b K(x, t_1)K(t_1, t_2)\cdots\\&K(t_{r-1}, t_r)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_{r-1}\times\\&\int_a^b\cdots\int_a^b K(t_r, t_{r+1})K(t_{r+1}, t_{r+2})\cdots\\&K(t_{m-1}, s)\mathrm{d}t_{r+1}\cdots\mathrm{d}t_{m-1}\Big\}.\end{aligned}$$

按公式(2.9), 花括号内第一个因子的重积分等于 $K_r(x, t_r)$, 而第二个因子的重积分则为 $K_{m-r}(t_r, s)$. 于是有

$$K_m(x, s)=\int_a^b K_r(x, t_r)K_{m-r}(t_r, s)\mathrm{d}t_r,$$

将此处的 t_r 换为 t, 便得到(2.8)式.

若近似解(2.6)是收敛的, 则它的极限给出了方程(2.1)的解, 并表示为以下无穷级数的形式:

$$\varphi(x)=f(x)+\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^m\int_a^b K_m(x, s)f(s)\mathrm{d}s, \qquad (2.10)$$

其中前 n 项的和就是 $\varphi_n(x)$.

以下我们证明近似解序列的收敛性.

记
$$B^2=\int_a^b\int_a^b|K(x, s)|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s,$$

$$C_m^2=\sup_{x\in[a, b]}\int_a^b|K_m(x, s)|^2\mathrm{d}s.$$

在(2.8)式中,令 $r=m-1$,则有

$$K_m(x, s)=\int_a^b K_{m-1}(x, t)K(t, s)\mathrm{d}t.$$

对此积分应用 Буняковский–Schwarz 不等式,可得到

$$|K_m(x, s)|^2\leqslant\int_a^b|K_{m-1}(x, t)|^2\mathrm{d}t\int_a^b|K(t, s)|^2\mathrm{d}t,$$

再对 s 取积分,有

$$\int_a^b|K_m(x, s)|^2\mathrm{d}s\leqslant B^2\int_a^b|K_{m-1}(x, t)|^2\mathrm{d}t\leqslant B^2C_{m-1}^2,$$

取左端积分的上界,立即可得以下估计式

$$C_m\leqslant BC_{m-1}\leqslant B^2C_{m-2}\leqslant\cdots\leqslant B^{m-1}C_1$$

类似地,对无穷级数(2.9)的一般项应用 Буняковский 不等式,有

$$\left|\int_a^b K_m(x, s)f(s)\mathrm{d}s\right|^2\leqslant\int_a^b|K_m(x, s)|^2\mathrm{d}s\int_a^b|f(s)|^2\mathrm{d}s$$
$$\leqslant C_m^2D^2\leqslant B^{2(m-1)}C_1^2D^2.$$

因此,无穷级数(2.10)的一般项的绝对值不超过

$$|\lambda|^mB^{m-1}C_1D,$$

所以级数(2.10)当 $|\lambda|<B^{-1}$ 时一致收敛. 从而极限函数给出了方程(2.1)的解.

现在证明对于适合这不等式的任意值 λ, 方程(2.1)仅有一个解. 假设不然,有 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 都是方程(2.1)的解,即有

$$\varphi_1(x)-\lambda\int_a^b K(x, s)\varphi_1(s)\mathrm{d}s=f(x),$$

$$\varphi_2(x)-\lambda\int_a^b K(x,\ s)\varphi_2(s)\mathrm{d}s=f(x).$$

将两式相减，且记 $\varphi_1(x)-\varphi_2(x)=\omega(x)$，则得

$$\omega(x)=\lambda\int_a^b K(x,\ s)\omega(s)\mathrm{d}s,$$

进而有 $$|\omega(x)|^2\leqslant|\lambda|^2\int_a^b|K(x,\ s)|^2\mathrm{d}s\int_a^b|\omega(s)|^2\mathrm{d}s,$$

两端再积分，得到

$$\int_a^b|\omega(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant|\lambda|^2\int_a^b\int_a^b|K(x,\ s)|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\int_a^b|\omega(s)|^2\mathrm{d}s,$$

即有 $$(1-|\lambda|^2B^2)\int_a^b|\omega(s)|^2\mathrm{d}s\leqslant 0.$$

因为 $|\lambda|<B^{-1}$，所以

$$\int_a^b|\omega(s)|^2\mathrm{d}s=0,$$

即 $\omega(x)\equiv 0$，或者 $\varphi_1(x)\equiv\varphi_2(x)$. 这就证得方程(2.1)有唯一解.

综上所述，即有下列的

定理2.1 若

$$\int_a^b|K(x,\ s)|^2\mathrm{d}s\leqslant C_1^2,\ C_1\ \text{是正常数},$$

则对于圆 $$|\lambda|<\frac{1}{B},\ B^2=\int_a^b\int_a^b|K(x,\ s)|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s$$

内的一切 λ 值，近似解序列(2.6)是一致收敛的，这序列的极限给出积分方程(2.1)的解，且解是唯一的.

若在级数(2.10)中取有限项，至 λ 的 n 次乘幂为止，则不难知道它的余项的绝对值不超过值

$$C_1D\frac{|\lambda|^{n+1}B^n}{1-|\lambda|B}.$$

现在进一步考虑级数(2.10). 记

$$\Gamma(x,\ s;\lambda)=\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^{m-1}K_m(x,\ s),\tag{2.11}$$

我们来证明右端级数关于变量 x, s 在圆 $|\lambda|<B^{-1}$ 内绝对收敛和一致收敛. 为此，设

$$\int_a^b |K(x, s)|^2 \mathrm{d}x \leqslant E^2, \ E\text{是正常数}.$$

这时，与上面证明近似解序列的一致收敛性类似，可得估计式

$$|K_m(x, s)| \leqslant B^{m-2} C_1 E \quad (m \geqslant 2).$$

因此级数(2.11)的一般项的绝对值不超过

$$|\lambda|^{m-1} B^{m-2} C_1 E,$$

从而可知，在圆$|\lambda| < B^{-1}$内，级数(2.11)对一切变量x和s绝对收敛和一致收敛.

函数$\Gamma(x, s; \lambda)$称为方程(2.1)的解核. 我们在级数(2.10)中交换和的记号与积分号的次序，立即可得出积分方程(2.1)的解通过解核$\Gamma(x, s; \lambda)$表达为如下简单形式:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s) \mathrm{d}s. \tag{2.12}$$

例如，考虑方程

$$\varphi(x) = e^x + \lambda \int_0^1 s\varphi(s) \mathrm{d}s, \tag{2.13}$$

我们取零次近似解

$$\varphi_0(x) = e^x,$$

于是有

$$\varphi_1(x) = e^x + \lambda \int_0^1 s e^s \mathrm{d}s = e^x + \lambda,$$

$$\varphi_2(x) = e^x + \lambda \int_0^1 s(e^s + \lambda) \mathrm{d}s = e^x + \lambda + \frac{\lambda^2}{2},$$

....

$$\varphi_n(x) = e^x + \lambda \int_0^1 s\varphi_n(s) \mathrm{d}s = e^x + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \cdots + \frac{\lambda^n}{2^{n-1}}.$$

由此，不难知道，方程(2.13)的解是

$$\varphi(x) = e^x + \lambda\left(1 + \frac{\lambda}{2} + \cdots + \frac{\lambda^{n-1}}{2^{n-1}} + \cdots\right) = e^x + \frac{2\lambda}{2-\lambda}, \tag{2.14}$$

这里 $\qquad |\lambda| < \frac{1}{B} = \sqrt{3}, \quad B^2 = \int_0^1\int_0^1 s^2\,ds\,dx = \frac{1}{3}.$

另外，可以计算得 $K(x, s) = s$ 的 m 次迭核为

$$K_m(x, s) = \frac{s}{2^{m-1}},$$

因此，方程(2.13)的解核

$$\Gamma(x, s; \lambda) = s\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^{m-1}}{2^{m-1}} = \frac{2s}{2-\lambda}.$$

于是，方程(2.13)的解又可用解核表示为

$$\varphi(x) = e^x + \lambda\int_0^1 \frac{2s}{2-\lambda}\,e^s\,ds = e^x + \frac{2\lambda}{2-\lambda}. \tag{2.15}$$

从解核 $\Gamma(x, s; \lambda)$ 的定义，可以看到，解核只与核 $K(x, s)$ 有关．所以，我们往往也称 $\Gamma(x, s; \lambda)$ 为对应于核 $K(x, s)$ 的解核．下面讨论解核的性质：

我们来证明，解核 $\Gamma(x, s; \lambda)$ 作为第一个变量 x 或第二个变量 s 的函数分别满足下面的积分方程：

$$\begin{cases} \Gamma(x, s; \lambda) = K(x, s) + \lambda\int_a^b K(x, t)\Gamma(t, s; \lambda)\,dt, \\ \Gamma(x, s; \lambda) = K(x, s) + \lambda\int_a^b \Gamma(x, t; \lambda)K(t, s)\,dt. \end{cases} \tag{2.16}$$

事实上，由于级数(2.11)对变量 x 和 s 绝对收敛和一致收敛．因此，和的记号与积分号可以交换，于是有

$$\begin{aligned} \lambda\int_a^b K(x, t)\Gamma(t, s; \lambda)\,dt &= \sum_{m=1}^{\infty}\lambda^m\int_a^b K(x, t)K_m(t, s)\,dt \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\lambda^m K_{m+1}(x, s) \\ &= \Gamma(x, s; \lambda) - K(x, s), \end{aligned}$$

即有 $\quad \Gamma(x, s; \lambda) = K(x, s) + \lambda\int_a^b K(x, t)\Gamma(t, s; \lambda)\,dt.$

这样就证得(2.16)中的第一个方程．类似地可以证明 $\Gamma(x, s; \lambda)$ 满足第二个方程．

此外，解核 $\Gamma(x, s, \lambda)$ 对参数 λ 还满足以下的关系式：

$$\begin{aligned}&\Gamma(x, s; \lambda)-\Gamma(x, s; \mu)\\&\quad=(\lambda-\mu)\int_a^b \Gamma(x, t; \mu)\Gamma(t, s; \lambda)\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{2.17}$$

和

$$\frac{\partial \Gamma(x, s; \lambda)}{\partial \lambda}=\int_a^b \Gamma(x, t; \lambda)\Gamma(t, s; \lambda)\mathrm{d}t.\tag{2.18}$$

事实上，根据(2.16)式，有

$$\begin{cases}\Gamma(x, s; \lambda)=K(x, s)+\lambda\int_a^b K(x, t)\Gamma(t, s; \lambda)\mathrm{d}t,\\ \Gamma(x, s; \mu)=K(x, s)+\mu\int_a^b \Gamma(x, t; \mu)K(t, s)\mathrm{d}t,\end{cases}\tag{2.19}$$

在(2.19)的第一式中以 t 替换 x，再乘以 $\mu\Gamma(x, t; \mu)$，然后对 t 取积分，得

$$\begin{aligned}&\mu\int_a^b \Gamma(x, t; \mu)\Gamma(t, s; \lambda)\mathrm{d}t=\mu\int_a^b \Gamma(x, t; \mu)K(t, s)\mathrm{d}t\\&+\lambda\mu\int_a^b\int_a^b \Gamma(x, \tau; \mu)\Gamma(\tau, s; \lambda)K(t, \tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{2.20}$$

同时，在(2.19)的第二式中以 t 替换 s，再乘以 $\lambda\Gamma(t, s; \lambda)$，然后对 t 取积分，又得

$$\begin{aligned}&\lambda\int_a^b \Gamma(x, t; \mu)\Gamma(t, s; \lambda)\mathrm{d}t=\lambda\int_a^b K(x, t)\Gamma(t, s; \lambda)\mathrm{d}t\\&+\lambda\mu\int_a^b\int_a^b \Gamma(x, \tau; \mu)\Gamma(t, s; \lambda)K(\tau, t)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{2.21}$$

再将(2.20)，(2.21)两式相减，并注意到等式(2.19)，即得(2.17)式

$$\Gamma(x, s; \lambda)-\Gamma(x, s; \mu)=(\lambda-\mu)\int_a^b \Gamma(x, t; \mu)\Gamma(t, s; \lambda)\mathrm{d}t.$$

最后在(2.17)式两端除以 $\lambda-\mu$，并令 $\mu\to\lambda$，则由解核关于参数的连续依赖性，即得(2.18)式.

这就是我们所要证明的.

到现在为止，我们仅在 $|\lambda|<B^{-1}$ 内定义解核，指出了解核的存在并证明了解核适合积分方程(2.16)，以后我们将看到在复数 λ 平面内，除某些孤立点外，方程(2.1)的解核都是存在的. 为此，

我们引出解核的一般定义如下：

若对一个值 λ 和任意自由项 $f(x)$，方程(2.1)有唯一解，且解可用(2.12)式表示，则称对于这已知值 λ，方程(2.1)有解核 $\Gamma(x, s; \lambda)$。

若方程的解核存在，则这解核必是唯一的．事实上，设对 $\lambda=\lambda_0$，方程(2.1)有两个解核 $\Gamma_1(x, s; \lambda_0)$ 和 $\Gamma_2(x, s; \lambda_0)$。因为当 $\lambda=\lambda_0$ 时方程有唯一解，于是对任意的函数 $f(x)$，有恒等式

$$f(x)+\lambda_0\int_a^b \Gamma_1(x, s; \lambda_0)f(s)\mathrm{d}s$$
$$=f(x)+\lambda_0\int_a^b \Gamma_2(x, s; \lambda_0)f(s)\mathrm{d}s,$$

因此有
$$\int_a^b u(x, s)f(s)\mathrm{d}s=0,$$

其中
$$u(x, s)=\Gamma_1(x, s; \lambda_0)-\Gamma_2(x, s; \lambda_0).$$

又因为 $f(s)$ 是任意的，故对于每个定值 x，取 $f(s)=\overline{u(x, s)}$，于是有

$$\int_a^b |u(x, s)|^2 \mathrm{d}s=0,$$

从而 $u(x, s)\equiv 0$，即 $\Gamma_1(x, s; \lambda_0)\equiv\Gamma_2(x, s; \lambda_0)$．这就证明了解核的唯一性。

下面从积分方程(2.16)出发提供一个方程(2.1)的解的存在唯一性定理．这个定理也给出了方程(2.1)有解核的一个充分条件。

定理2.2 若对于某值 λ 存在着关于两个变量 x 和 s 平方绝对可积的函数 $\Gamma(x, s; \lambda)$：

$$\int_a^b\int_a^b |\Gamma(x, s; \lambda)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s<\infty,$$

它满足积分方程(2.16)，则对于这个值 λ，方程(2.1)有唯一解，且这个解由公式(2.12)所确定。

证明 先证明方程(2.1)的一切解必可表示成(2.12)的形式，设 $\varphi(x)$ 是方程(2.1)的解，则有

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,\ t)\varphi(t)\mathrm{d}t,$$

将上式两端乘以 $\lambda\Gamma(x,\ s;\ \lambda)$，且对 s 取积分

$$\begin{aligned}\lambda\int_a^b \Gamma(x,\ s;\ \lambda)\varphi(s)\mathrm{d}s\\ =\lambda\int_a^b \Gamma(x,\ s;\ \lambda)f(s)\mathrm{d}s\\ +\lambda\int_a^b\left[\int_a^b \lambda\Gamma(x,\ s;\ \lambda)K(s,\ t)\mathrm{d}s\right]\varphi(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

注意到(2.16)的第二式，则有

$$\lambda\int_a^b \Gamma(x,\ s;\ \lambda)K(s,\ t)\mathrm{d}s=\Gamma(x,\ t;\ \lambda)-K(x,\ t),$$

因此，前式又可写成

$$\begin{aligned}\lambda\int_a^b \Gamma(x,\ s;\ \lambda)\varphi(s)\mathrm{d}s\\ =\lambda\int_a^b \Gamma(x,\ s;\ \lambda)f(s)\mathrm{d}s\\ +\lambda\int_a^b \Gamma(x,\ t;\ \lambda)\varphi(t)\mathrm{d}t-\lambda\int_a^b K(x,\ t)\varphi(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

消去上式左右两端相同的项，并注意到

$$\lambda\int_a^b K(x,\ t)\varphi(t)\mathrm{d}t=\varphi(x)-f(x),$$

即得 $$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b \Gamma(x,\ s;\ \lambda)f(s)\mathrm{d}s.$$

这就证明了方程的一切解都可由(2.12)式给出。

再应用积分方程(2.16)，来证明(2.12)式给出方程 (2.1) 的解。将表达式(2.12)代入方程(2.1)，且将一切项都移至左端，得

$$\begin{aligned}f(x)+\lambda\int_a^b \Gamma(x,\ s;\ \lambda)f(s)\mathrm{d}s-f(x)\\ -\lambda\int_a^b K(x,\ t)\left[f(t)+\lambda\int_a^b \Gamma(t,\ t_1;\ \lambda)f(t_1)\mathrm{d}t_1\right]\mathrm{d}t\\ =\lambda\int_a^b [\Gamma(x,\ s;\ \lambda)-K(x,\ s)]f(s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$-\lambda\int_a^b\left[\lambda\int_a^b K(x,\ t)\Gamma(t,\ t_1;\ \lambda)\mathrm{d}t\right]f(t_1)\mathrm{d}t_1$$

$$=\lambda\int_a^b\Big[\Gamma(x,\ s;\ \lambda)-K(x,\ s)$$

$$-\lambda\int_a^b K(x,\ t)\Gamma(t,\ s;\ \lambda)\mathrm{d}t\Big]f(s)\mathrm{d}s=0,$$

这是因为上式最右端的方括号内的式子就是积分方程(2.16)的第一式，故它恒等于零，这就证明了表达式(2.12)确实给出了方程(2.1)的解．定理证毕．

§2 第二种 Volterra 型积分方程

现在讨论 Fredholm 型方程的一种特别形式，即方程的核 $K(x,\ s)$当 $s>x$ 时恒等于零，这时称它为 Volterra 型方程．因此 Volterra 型第二种方程有以下形式:

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^x K(x,\ s)\varphi(s)\mathrm{d}s=f(x). \qquad (2.20')$$

例如，考虑二阶微分方程

$$y''(x)+a_1(x)y'(x)+a_2(x)y(x)=f(x) \qquad (2.21')$$

满足初始条件

$$y(0)=y_0,\quad y'(0)=y_1 \qquad (2.22)$$

的求解问题．不妨记

$$\psi(x)=y''(x),$$

于是有

$$y'(x)=\int_0^x\psi(s)\mathrm{d}s+y_1,$$

$$y(x)=\int_0^x(x-s)\psi(s)\mathrm{d}s+y_1x+y_0. \qquad (2.23)$$

将以上三式代入(2.21′)，即得关于函数 $\psi(x)$ 的积分方程

$$\psi(x)+\int_0^x[a_1(x)+a_2(x)(x-s)]\psi(s)\mathrm{d}s$$

$$=f(x)-y_1a_1(x)-y_1xa_2(x)-y_0a_2(x), \qquad (2.24)$$

或简记为

$$\psi(x)+\int_0^x K(x, s)\psi(s)\mathrm{d}s=g(x). \qquad (2.25)$$

换言之，求方程(2.21)适合初始条件(2.22)的解，可归结为解 Volterra 型方程 (2.25)，解得 $\psi(x)$ 后，再由 (2.23) 即可确定 $y(x)$.

对于方程(2.20)，我们有

定理2.3 若第二种 Volterra 型方程 (2.20) 的自由项 $f(x)$ 是绝对可积的，则对于一切值 λ，这个方程的形如(2.10)的近似解序列是一致收敛的，它的极限函数就是方程(2.20)的解，并且解是唯一的.

证明 先假设核 $K(x, s)$ 对一切 $x, s\in[a, b]$ 是有界的，即有

$$|K(x, s)|<M, \quad M \text{ 是正常数}$$

按定义，当 $x<s$ 时，$K(x, s)\equiv 0$，由此不难推出 Volterra 方程的一切迭核当 $x<s$ 时也都等于零，而当 $x>s$ 时可写成以下形式：

$$K_m(x, s)=\int_s^x K(x, t)K_{m-1}(t, s)\mathrm{d}t. \qquad (2.26)$$

不妨考察 $m=2$ 的情形，即

$$K_2(x, s)=\int_a^b K(x, t)K(t, s)\mathrm{d}t.$$

当 $t>x$ 时，积分号下第一个因子为零；而当 $t<s$ 时第二个因子为零. 若 $s>x$，则必有 $t>x$ 或 $t<s$，因此积分为零. 但若 $x>s$，则积分号下的函数仅当 $s<t<x$ 时不为零，这时有

$$K_2(x, s)=\int_s^x K(x, t)K(t, s)\mathrm{d}t.$$

进而可应用数学归纳法证明对于任意 m 的情形，(2.26)式同样成立.

估计 $K(x, s)$ 的 m 次迭核. 因为 $|K(x, s)|<M$，所以

$$|K_2(x,s)|=\left|\int_s^x K(x, t)K(t, s)\mathrm{d}t\right|<M^2(x-s),$$

$$|K_3(x, s)| = \left|\int_s^x K(x, t) K_2(t, s)\,\mathrm{d}t\right| < \frac{M^3(x-s)^2}{2!},$$

设对某一值m有估计式

$$|K_m(x, s)| < \frac{M^m(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}, \tag{2.27}$$

则对 $m+1$ 次迭核 $K_{m+1}(x, s)$，有

$$|K_{m+1}(x, s)| = \left|\int_s^x K(x, t) K_m(t, s)\mathrm{d}t\right|$$
$$< \frac{M^{m+1}}{(m-1)!}\int_s^x (t-s)^{m-1}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{M^{m+1}(x-s)^m}{m!},$$

这也就是说，我们应用数学归纳法证明了对任意的m次迭核恒有估计式(2.27)．再用较大值 $b-a$ 代替 $x-s$，得

$$|K_m(x, s)| < \frac{M^m(b-a)^{m-1}}{(m-1)!}.$$

于是相应于§1中的级数(2.10)的一般项的绝对值不超过

$$\frac{|\lambda|^m M^m(b-a)^{m-1}}{(m-1)!}\int_a^b |f(s)|\mathrm{d}s.$$

所以这级数对于任意值λ是绝对收敛和一致收敛的．这个级数的和给出方程(2.20)的解，并同样可通过解核写成以下形式：

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^x \Gamma(x, s; \lambda) f(s)\mathrm{d}s. \tag{2.28}$$

再考虑核是弱奇性的情况，这时方程具有形式

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^x \frac{H(x, s)}{(x-s)^\alpha}\varphi(s)\mathrm{d}s = f(x),\ 0<\alpha<1, \tag{2.29}$$

其中 $H(x, s)$ 是有界函数．

对于任意值λ，这个方程的近似解序列也是一致收敛的，不过收敛速度比较慢．

设$|H(x, s)| < M$，其中 M 是正常数，因此

$$|K(x, s)| = \left|\frac{H(x, s)}{(x-s)^\alpha}\right| < \frac{M}{|x-s|^\alpha}.$$

估计 $K(x, s)$ 的 m 次迭核，我们有

$$|K_2(x, s)| = \left|\int_s^x K(x, t)K(t, s)\,\mathrm{d}t\right|$$
$$\leqslant M^2\int_s^x \frac{\mathrm{d}t}{(x-t)^\alpha(t-s)^\alpha}.$$

注意到积分

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha(t-a)^\beta} = (b-a)^{1-\alpha-\beta}B(1-\alpha, 1-\beta),$$

这里 $B(p, q)$ 是 Beta 函数，它可通过 Gamma 函数表示成

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (p>0,\ q>0),$$

于是有

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha(t-a)^\beta}$$
$$= (b-a)^{1-\alpha-\beta}\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\alpha-\beta)}. \tag{2.30}$$

由此得 $$|K_2(x, s)| \leqslant M^2(x-s)^{1-2\alpha}\frac{\Gamma^2(1-\alpha)}{\Gamma(2-2\alpha)}.$$

设对于某一值 m 有估计式

$$|K_m(x, s)| < \frac{M^m(x-s)^{m-1-m\alpha}\cdot\Gamma^m(1-\alpha)}{\Gamma(m-m\alpha)}, \tag{2.31}$$

则 $$|K_{m+1}(x, s)| = \left|\int_s^x K(x, t)K_m(t, s)\,\mathrm{d}t\right|$$
$$< \frac{M^{m+1}\Gamma^m(1-\alpha)}{\Gamma(m-m\alpha)}\int_s^x (x-t)^{-\alpha}(t-s)^{m-1-m\alpha}\,\mathrm{d}t,$$

应用公式(2.30)，就得到

$$|K_{m+1}(x, s)| < \frac{M^{m+1}\Gamma^m(1-\alpha)}{\Gamma(m-m\alpha)}$$
$$\cdot\frac{(x-s)^{m-(m+1)\alpha}\Gamma(1-\alpha)\Gamma(m-m\alpha)}{\Gamma(m+1-(m+1)\alpha)}$$
$$= \frac{M^{m+1}(x-s)^{m-(m+1)\alpha}\Gamma^{m+1}(1-\alpha)}{\Gamma(m+1-(m+1)\alpha)}.$$

这样，我们用数学归纳法证明了：对任意值 m，不等式(2.31)是正确的．取 m 足够大时，可使(2.31)式中 $(x-s)$ 的幂次是正的，因此可用较大的值 $b-a$ 代替 $x-s$，进而得到在弱奇性核的情形，§1

中的级数(2.10)的一般项的绝对值小于

$$\frac{|\lambda|^m M^m (b-a)^{m-1-m\alpha} \Gamma^m (1-\alpha)}{\Gamma(m-m\alpha)} \int_a^b |f(s)| \mathrm{d}s. \qquad (2.32)$$

以下证明级数同样对任意值 λ 都是绝对收敛且一致收敛的.

事实上,应用 Stirling 公式

$$\Gamma(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi p}} p^p e^{-p+\theta/12p}, \quad 0<\theta<1,$$

则有

$$\Gamma(m-m\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m(1-\alpha)}} [m(1-\alpha)]^{m(1-\alpha)} \times e^{-m(1-\alpha)+\frac{\theta_m}{12m(1-\alpha)}}, \quad 0<\theta_m<1.$$

用 a_m 表示(2.32)式的值,则有

$$\sqrt[m]{a_m} = \frac{|\lambda| M (b-a)^{1-\alpha-\frac{1}{m}} \Gamma(1-\alpha) (2\pi)^{\frac{1}{2m}} e^{1-\alpha-\frac{\theta_m}{12m^2(1-\alpha)}}}{[m(1-\alpha)]^{1-\alpha-\frac{1}{2m}}} \times \left[\int_a^b |f(s)| \mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{m}}.$$

当 $m\to\infty$ 时,此值的极限等于零,因此,由 Cauchy 判别法,对任意值 λ, §1 中的级数(2.10)是绝对收敛且一致收敛的.

最后证明 Volterra 型方程(2.20)的解是唯一的.

这只要证明它的齐次方程仅有零解即可. 设 $\omega(x)$ 是它的解,即 $\omega(t)$ 满足方程

$$\omega(t) = \lambda \int_a^t K(t, s)\omega(s)\mathrm{d}s.$$

两边乘上 $K(x, t)$,再对 t 取积分,得到

$$\begin{aligned}
\omega(x) &= \lambda \int_a^x K(x, t)\omega(t)\mathrm{d}t \\
&= \lambda^2 \int_a^x \mathrm{d}t \int_a^t K(x, t)K(t, s)\omega(s)\mathrm{d}s \\
&= \lambda^2 \int_a^x \omega(s)\mathrm{d}s \int_s^x K(x, t)K(t, s)\mathrm{d}t \\
&= \lambda^2 \int_a^x K_2(x, s)\omega(s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

这里，利用了交换积分次序的 Dirichlet 公式*)．依次类推，即有

$$\omega(x)=\lambda^m\int_a^x K_m(x, s)\omega(s)\mathrm{d}s,$$

从而
$$|\omega(x)|\leqslant|\lambda|^m\max_{x, s\in[a, b]}|K_m(x, s)|\cdot\int_a^b|\omega(s)|\mathrm{d}s,$$

进而得

$$\int_a^b|\omega(x)|\mathrm{d}x\leqslant|\lambda|^m(b-a)\max_{x, s\in[a, b]}|K_m(x, s)|\int_a^b|\omega(x)|\mathrm{d}x,$$

由此

$$[1-|\lambda|^m(b-a)\max_{x, s\in[a, b]}|K_m(x, s)|]\int_a^b|\omega(x)|\mathrm{d}x\leqslant 0.$$

由前面的讨论可知道，上式左端括号内的项当 m 足够大时恒大于零，故唯有

$$\int_a^b|\omega(x)|\mathrm{d}x=0,$$

即
$$\omega(x)\equiv 0.$$

定理证毕．

例如，考察方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^x e^{x-s}\varphi(s)\mathrm{d}s=f(x), \tag{2.33}$$

我们来作出这个方程的迭核和解核，有

$$K_2(x, s)=\int_s^x e^{x-t}e^{t-s}\mathrm{d}t=(x-s)e^{x-s},$$

$$K_3(x, s)=\int_s^x e^{x-t}(t-s)e^{t-s}\mathrm{d}t=\frac{(x-s)^2}{2!}e^{x-s},$$

一般地有
$$K_m(x, s)=\frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}e^{x-s}.$$

所以解核

$$\Gamma(x, s; \lambda)=e^{x-s}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^{m-1}(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}$$
$$=e^{(\lambda+1)(x-s)}, \quad s\leqslant x.$$

---

*) 交换积分次序的 Dirichlet 公式为

$$\int_a^b \mathrm{d}y\int_a^y f(x, y)\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x\int_x^b f(x, y)\mathrm{d}y.$$

当 $s>x$ 时，$\Gamma(x, s; \lambda)\equiv 0$.

由此我们得到方程(2.33)的解为

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x e^{(\lambda+1)(x-s)}f(s)\,ds. \tag{2.34}$$

§3 退化核积分方程

存在一种重要类型的积分方程，它可以化为代数方程组以求解．若方程的核可表为有限项的和，和式中的每一项都是两个因子的乘积，其中一个因子仅依赖于 x，而另一个仅依赖于 s，这样的核称为退化核．也就是说退化核具有以下形式

$$K(x, s)=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)b_i(s).$$

而退化核的积分方程可表示为

$$\varphi(x)-\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\int_a^b b_i(s)\varphi(s)\,ds=f(x), \tag{2.35}$$

这里 n 个 $a_i(x)$ 和 $b_i(s)$ 都可认为是线性无关的．若不然，则可将和式的项适当减少，使余下的有限个函数是线性无关的．记

$$c_i=\int_a^b b_i(s)\varphi(s)\,ds,$$

c_i 是常数，因 $\varphi(x)$ 是未知的，从而 c_i 也是未知的．这时(2.35)式可写成

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}c_i a_i(x), \tag{2.36}$$

再将它代入积分方程(2.35)，可得

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\left\{c_i-\int_a^b b_i(s)\left[f(s)+\lambda\sum_{k=1}^{n}c_k a_k(s)\right]ds\right\}=0.$$

因为函数 $a_i(x)$ 是线性无关的，故从上式又得

$$c_i-\int_a^b b_i(s)\left[f(s)+\lambda\sum_{k=1}^{n}c_k a_k(s)\right]ds=0 \quad (i=1, 2, \cdots, n).$$

为简单起见，引进记号

$$\int_a^b b_i(s)f(s)=f_i, \quad \int_a^b b_i(s)a_k(s)\,ds=a_{ik},$$

则有

$$c_i-\lambda\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_k=f_i\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).\tag{2.37}$$

这就是决定常数 c_i 的线性代数方程组，解出这个方程组，再利用(2.36)，这也就等于解出了积分方程(2.35)。

代数方程组(2.37)的系数行列式为

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n}\\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \cdots & -\lambda a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \cdots & 1-\lambda a_{nn}\end{vmatrix}.$$

这是一个 λ 的多项式，它的次数不大于 n，且不恒为零(因当 $\lambda=0$ 时它等于 1)，因此有不多于 n 个不同的 λ 存在，使得 $D(\lambda)=0$. 当 λ 取这些值时，代数方程组(2.37)和积分方程(2.35)或者没有解，或者有无穷多个解. 对于其余的一切值 λ，积分方程有唯一解.

值得注意的是：代数方程组(2.37)的得来，可不必用(2.36)式代入(2.35)式，只须以 $b_k(x)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 乘(2.36)的两边，且对于 x 从 a 到 b 取积分，再将 i, k 互换，即得方程组(2.37).

例 1 设所给的方程是

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1(x+s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s=f(x),\tag{2.38}$$

它的核 $K(x,\ s)=x+s$ 是退化核，其解有以下形式：

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda(c_1x+c_2).$$

由上述方法可得到决定 c_1 和 c_2 的代数方程组

$$\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)c_1-\lambda c_2=f_1,$$

$$-\frac{1}{3}c_1+\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)c_2=f_2,$$

其中
$$f_1=\int_0^1 f(s)\,\mathrm{d}s,\quad f_2=\int_0^1 sf(s)\,\mathrm{d}s.$$

这个方程组的系数行列式等于 $-\dfrac{\lambda^2}{12}-\lambda+1$，它对于下面两个值

等于零:

$$\lambda_1=-6+2\sqrt{3}, \quad \lambda_2=-6-4\sqrt{3}.$$

若 λ 不等于 λ_1 和 λ_2, 则方程(2.38)有唯一解:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^1 \frac{6(\lambda-2)(x-s)-12\lambda xs-4\lambda}{\lambda^2+12\lambda-12} f(s)\,ds. \quad (2.39)$$

例 2 讨论方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^{2\pi} \sin x\cos s\,\varphi(s)\,ds=f(x). \quad (2.40)$$

记

$$\int_0^{2\pi} \varphi(s)\cos s\,ds=c,$$

有

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda c\sin x.$$

将最后等式乘以 $\cos x$, 且从 0 至 2π 取积分. 则有

$$c=\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx,$$

从而解得

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^{2\pi} \sin x\cos s f(s)\,ds. \quad (2.40')$$

由此可知, 方程(2.40)对一切 λ 值都可解, 解由(2.40′)式表示之. 且由相应的齐次方程只有零解得知, 方程(2.40)的解是唯一的.

§ 4 Fredholm 方程的一般情况

由 § 3 可知, 解退化核积分方程可以化为解线性代数方程组. 这一节将指出一般情况的 Fredholm 方程又可化为退化核的积分方程来求解.

设核 $K(x, s)$ 的绝对值平方关于 $x, s\in[a, b]$ 的重积分存在, 则它可展成为 Fourier 重级数

$$K(x, s)\sim\sum_{i,k=0}^{\infty} A_{ik}\cos\frac{i\pi(x-a)}{b-a}\cos\frac{k\pi(s-a)}{b-a}. \quad (2.41)$$

我们可不考虑这个级数的收敛性. 引入记号

$$P(x, s)=\sum_{i,k=0}^{n} A_{ik}\cos\frac{i\pi(x-a)}{b-a}\cos\frac{k\pi(s-a)}{b-a}, \quad (2.42)$$

$$K(x, s)-P(x, s)=K'(x, s), \tag{2.43}$$

则 Fredholm 积分方程(2.1)

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\mathrm{d}s=f(x)$$

可以写成以下形式:

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K'(x, s)\varphi(s)\mathrm{d}s$$

$$=f(x)+\lambda\int_a^b P(x, s)\varphi(s)\mathrm{d}s. \tag{2.44}$$

(2.44)式的右端暂时认为是已知函数,于是,方程(2.44)可以看作是以 $K'(x, s)$ 为核的积分方程,它的参数是 λ,且以

$$f(x)+\lambda\int_a^b P(x, s)f(s)\mathrm{d}s \tag{2.45}$$

作为自由项. 以下证明当 n 足够大时,方程(2.44)可用逐次逼近法求解.

核 $K'(x, s)$ 是和下面的 Fourier 级数相对应的:

$$K'(x, s)\sim\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}A_{ik}\cos\frac{i\pi(x-a)}{b-a}\cos\frac{k\pi(s-a)}{b-a}$$

$$+\sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A_{ik}\cos\frac{i\pi(x-a)}{b-a}\cos\frac{k\pi(s-a)}{b-a}. \tag{2.46}$$

我们引进记号 $\int_a^b\int_a^b|K'(x, s)|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s=B'^2$.

由 Parseval 等式,可计算得到

$$B'^2=\frac{(b-a)^2}{2}\left\{\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}|A_{ik}|^2+\sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|A_{ik}|^2\right\},$$

而它又是收敛级数

$$\frac{(b-a)^2}{2}\sum_{i, k=0}^{\infty}|A_{ik}|^2$$

的余项,于是可取 n 足够大,使 B'^2 为任意小的正数,即可选取这样的 n,使得以下不等式成立:

$$B'<\frac{1}{|\lambda|}. \tag{2.47}$$

由此根据 §1 中的讨论,方程(2.44)可用逐次逼近法求解,即

存在 $K'^2(x, s)$ 的解核

$$\Gamma'(x, s; \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K'_m(x, s),$$

其中 $K'_m(x, s)$ 是由 $K'(x, s)$ 得到的迭核，使方程(2.44)的解可写为

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b P(x, s)\varphi(s)\mathrm{d}s + \lambda\int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda) \times\left[f(t) + \lambda\int_a^b P(t, s)\varphi(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t. \tag{2.48}$$

再引进记号

$$f(x) + \lambda\int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda) f(t)\mathrm{d}t = F(x),$$

$$P(x, s) + \lambda\int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda) P(t, s)\mathrm{d}t = K''(x, s),$$

最后就得到与(2.44)等价的积分方程

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K''(x, s)\varphi(s)\mathrm{d}s = F(x). \tag{2.49}$$

注意到 $P(x, s) = \sum_{i=1}^{n} \cos\frac{i\pi(x-a)}{b-a} b_i(s),$

式中 $b_i(s) = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\cos\frac{k\pi(s-a)}{b-a},$

则有

$$\int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda) P(t, s)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} b_i(s)\int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda)\cos\frac{i\pi(t-a)}{b-a}\mathrm{d}t,$$

从而 $K''(x, s)$ 又可写成

$$K''(x, s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) b_i(s), \tag{2.50}$$

其中 $a_i(x) = \cos\frac{i\pi(x-a)}{b-a} + \lambda\int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda)\cos\frac{i\pi(t-a)}{b-a}\mathrm{d}t.$

显见，$K''(x, s)$ 是一个退化核，所以方程(2.49)可化为线性代数方程组以求解.

在实际运用上，可将所述方法简化.

设方程(2.42)的核可用任何一种方法分解成两个核之和

$$K(x, s)=P(x, s)+K'(x, s),$$

其中 $P(x, s)$ 是退化核；$K'(x, s)$ 适合

$$\int_a^b |K'(x, s)|^2 \mathrm{d}s \leqslant c',$$

其中 c' 是充分小的正数，又设所给的方程有解 $\varphi(x)$，则

$$\left|\int_a^b K'(x, s)\varphi(s)\mathrm{d}s\right|^2 \leqslant \int_a^b |K'(x, s)|^2 \mathrm{d}s \int_a^b |\varphi(s)|^2 \mathrm{d}s$$

$$\leqslant c' \int_a^b |\varphi(s)|^2 \mathrm{d}s,$$

即 $\int_a^b K'(x, s)\varphi(s)\mathrm{d}s$ 是一个很小的量，因此我们可用退化核方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b P(x, s)\varphi(s)\mathrm{d}s=f(x)$$

近似地代替方程(2.43)以求解.

§ 5 Fredholm 定理

积分方程在一般情形不可能直接求得精确解，而往往采取各种近似方法以求解. 因此在近似求解时总是假定相应的方程是可解的. 这就要求我们对各种情况下的方程的可解性进行讨论. Fredholm 的四个定理就是进行这方面研究的重要结果，也是关于积分方程经典理论的重要基础. 在叙述并证明这些定理以前，先引进一些术语.

正则值: 对于某个值 λ，若 Fredholm 方程的解核存在，这样的 λ 称为正则值。

特征值: 对于解核不存在的值 λ，称为特征值或本征值.

显然，若 λ 是一个正则值，则齐次方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\mathrm{d}s=0 \tag{2.51}$$

仅有零解. 这是因为对于这个值 λ，方程(2.1)的解核存在，于是，(2.1)的任意右端存在唯一解，故它的齐次方程(2.51)只有零解.

换言之，齐次方程(2.51)有不恒等于零的解，当且仅当 λ 是特征值时，才有可能.

同时易知，若 $\varphi_1(x)$ 是齐次方程(2.51)的解，则 $c\varphi_1(x)$ 也是它的解，这里 c 是任意常数；又若 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 是方程(2.51)的两个解时，则其和 $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ 也是它的解. 这样一来，如果 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_k(x)$ 满足齐次方程(2.51)，则它们的线性组合

$$c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\cdots+c_k\varphi_k(x)$$

也满足方程(2.51). 于是，若齐次积分方程有一个不为零(即不恒为零)的解，则它就有无穷多个这样的解. 我们称齐次积分方程的非零解为核 $K(x, s)$ 的特征函数或本征函数，且它们是同已知的特征值相对应的.

Fredholm 的四个定理为:

定理 2.4 在 λ 平面的任意有限区域内，Fredholm 积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\mathrm{d}s=f(x) \tag{2.52}$$

只存在有限个特征值.

证明 在§4 中已经指明，一般的 Fredholm 积分方程，可归结为与它等价的具有退化核的积分方程，而后者又可归结为线性代数方程组. 设 λ 在 $|\lambda|\leqslant R$ 内变动，对 λ 平面的任意有限区域，总可找到足够大的 R，使得圆域 $|\lambda|\leqslant R$ 含有它. 我们按§4 中的方法将核 $K(x, s)$ 作这样的分解:

$$K(x, s)-P(x, s)=K'(x, s),$$

使得 $B'<\dfrac{1}{R+1}$. 这时上述的代数方程组的诸系数和自由项在一个圆 $|\lambda|\leqslant R$ 内都是 λ 的全纯函数，相应的系数阵行列式 $D_R(\lambda)$ 也是 λ 的全纯函数. 另外又有 $D_R(0)=1$，故这个行列式不恒等于零，由此可知 $D_R(\lambda)$ 在 $|\lambda|\leqslant R$ 内仅可能有有限个零点，而一切使 $D_R(\lambda)\neq 0$ 的 λ 都是方程(2.52)的正则值. 这就证明了 Fredholm 第一定理.

注 1 从 Fredholm 第一定理，显示出下面的等价结果:

Fredholm 方程的特征值的个数或为有限，或为可列；在后一情形，特征值随同它的个数增至无穷大.

注 2 若核是退化核，则特征值的个数一定是有限的.

定理 2.5 *每一个特征值至少与一个特征函数对应．与一个已知特征值相对应的且是线性无关的特征函数的个数是有限的.*

证明 设 $\lambda=\lambda_0$ 是一特征值，则与原积分方程等价的线性代数方程组(2.37)的行列式等于零，且对应的齐次方程组有 r 个线性无关解$(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}, \cdots, c_n^{(j)})$ $(1\leqslant j\leqslant r,\ 1\leqslant r<n)$．从而齐次积分方程有相应的解

$$\varphi_j(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i^{(j)}a_i(x) \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ r).$$

这些解是线性无关的．事实上，设 $\sum_{j=1}^{r}\alpha_j\varphi_j(x)=0$，将上面的 $\varphi_j(x)$ 的表达式代入，且应用函数 $a_i(x)$ 的线性无关性，则得到

$$\sum_{j=1}^{r}\alpha_j c_i^{(j)}=0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

又因为 $(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}, \cdots, c_n^{(j)})$ 是线性无关的，故 $\alpha_j=0$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$．这就得出 $\varphi_j(x)$ 是线性无关的．此外，Fredholm 积分方程再没有别的解了．这里 r 称为特征值 λ_0 的秩．至此，即证明了 Fredholm 第二定理.

在论证第三定理之前，先考察积分算子

$$K\varphi=\int_a^b K(x,\ s)\varphi(s)\mathrm{d}s$$

和

$$K^*\psi=\int_a^b \overline{K(s,\ x)}\psi(s)\mathrm{d}s.$$

$K\varphi$ 称为 Fredholm 算子；$K^*\psi$ 称为关于 $K\varphi$ 的共轭算子．显然 $K\varphi$ 也是关于 $K^*\psi$ 的共轭算子．称 $K^*(x,\ s)=\overline{K(s,\ x)}$ 为核 $K(x,\ s)$ 的共轭核.

以积分
$$(\varphi,\ \psi)=\int_a^b \varphi(x)\overline{\psi(x)}\,\mathrm{d}x$$

表示两个函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的数量积.

下面证明互为共轭的算子 $K\varphi$ 与 $K^*\psi$ 有以下一些重要性

质：

(i) $(K\varphi,\ \psi)=(\varphi,\ K^*\psi)$.

这是因为

$$
\begin{aligned}
(K\varphi,\ \psi)&=\int_a^b\left\{\overline{\psi(x)}\int_a^b K(x,\ s)\varphi(s)\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}x\\
&=\int_a^b\varphi(s)\left\{\int_a^b K(x,\ s)\overline{\psi(x)}\ \mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}s\\
&=\int_a^b\varphi(x)\overline{\left\{\int_a^b\overline{K(s,\ x)}\psi(s)\mathrm{d}s\right\}}\mathrm{d}x\\
&=(\varphi,\ K^*\psi).
\end{aligned}
$$

(ii) 若 $K\varphi$ 和 $L\varphi$ 为下面形式的两个算子：

$$K\varphi=\int_a^b K(x,\ s)\varphi(s)\mathrm{d}s,$$

$$L\varphi=\int_a^b L(x,\ s)\varphi(s)\mathrm{d}s,$$

则易知 $K(L\varphi)$ 也是积分算子，且有

$$K(L\varphi)=\int_a^b M(x,\ s)\varphi(s)\mathrm{d}s,$$

其中
$$M(x,\ s)=\int_a^b K(x,\ t)L(t,\ s)\mathrm{d}t.$$

有时也把 $K(L\varphi)$ 记为 $KL\varphi$. 应注意，在一般情况下，$KL\varphi\neq LK\varphi$.

(iii) 若记 $K^2\varphi=KK\varphi,\ K^3\varphi=KK^2\varphi,\cdots,\ K^n\varphi=KK^{n-1}\varphi$,

则有
$$K^n\varphi=\int_a^b K_n(x,\ s)\varphi(s)\mathrm{d}s,$$

其中 $K_n(x,\ s)$ 是核 $K(x,\ s)$ 的 n 次迭核.

(iv) $(KL)^*\varphi=L^*K^*\varphi$.

这是因为此时一方面有

$$(KL\psi,\ \varphi)=(\psi,\ (KL)^*\varphi);$$

另一方面又有

$$(KL\psi,\ \varphi)=(L\psi,\ K^*\varphi)=(\psi,\ L^*K^*\varphi),$$

将以上两式相减，得

$$(\psi,\ (KL)^*\varphi - L^*K^*\varphi) = 0.$$

记函数 $\omega(x) = (KL)^*\varphi - L^*K^*\varphi$. 数量积 $(\psi,\ \omega) = 0$ 表示 ω 与任意函数 ψ 正交,在特别情况下,ω 也与它本身正交,即有

$$(\omega,\ \omega) = \int_a^b |\omega(x)|^2 \mathrm{d}x = 0,$$

从而 $\omega(x) \equiv 0$, 也就是 $(KL)^*\varphi = L^*K^*\varphi$.

由此即得 $$(K^n)^* = (K^*)^n.$$

这也就是说: n 次迭核的共轭核是共轭核的 n 次迭核.

定理 2.6 若 λ_0 是核 $K(x,\ s)$ 的特征值, 则 $\bar{\lambda}_0$ 是它的共轭核 $\overline{K(s,\ x)}$ 的特征值, 且方程

$$\varphi(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x,\ s)\varphi(s)\mathrm{d}s = 0 \tag{2.53}$$

的线性无关的特征函数的个数, 与它的共轭方程

$$\psi(x) - \bar{\lambda}_0 \int_a^b \overline{K(s,\ x)}\psi(s)\mathrm{d}s = 0 \tag{2.54}$$

的特征函数的个数是相同的.

证明 对于有退化核的积分方程,这个定理是显然成立的,因为与(2.53)和(2.54)等价的线性代数方程组是互为共轭的, 它们的系数阵行列式各为

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \cdots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}$$

和

$$D^*(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\overline{\lambda a_{11}} & -\overline{\lambda a_{12}} & \cdots & -\overline{\lambda a_{n1}} \\ -\overline{\lambda a_{12}} & 1-\overline{\lambda a_{22}} & \cdots & -\overline{\lambda a_{n2}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\overline{\lambda a_{1n}} & -\overline{\lambda a_{2n}} & \cdots & 1-\overline{\lambda a_{nn}} \end{vmatrix}.$$

按照线性代数方程组的理论,它们的秩是相同的,因此代数方程组的线性无关解的个数也是相同的.

对于任意核的 Fredholm 方程, 因为按 § 4 的方法将两个相互共轭的方程化为有退化核的两个方程后, 不能确定后者两个方

程也是互为共轭的，故不能从讨论后者而直接推出前者两个互为共轭的方程对本定理成立．为此，我们一面按§4的方法建立与(2.53)等价的积分方程

$$\varphi(x)-\lambda_0\int_a^b K''(x,\ s)\varphi(s)\,ds=0, \tag{2.55}$$

另外又可将共轭方程(2.54)写成

$$\psi(x)-\overline{\lambda}_0\int_a^b \overline{K'(s,\ x)}\psi(s)\,ds=\overline{\lambda}_0\int_a^b \overline{P(s,\ x)}\psi(s)\,ds, \tag{2.56}$$

并且记

$$\psi(x)-\overline{\lambda}_0\int_a^b \overline{K'(s,\ x)}\psi(s)\,ds=\omega(x), \tag{2.57}$$

我们又可用逐次迫近法解得

$$\psi(x)=\omega(x)+\overline{\lambda}_0\int_a^b \overline{\Gamma'(s,\ x;\ \lambda_0)}\omega(s)\,ds. \tag{2.58}$$

将(2.57)及(2.58)代入(2.56)，得到关于$\omega(x)$的有退化核的积分方程

$$\omega(x)-\overline{\lambda}_0\int_a^b \overline{K''(s,\ x)}\omega(s)\,ds=0. \tag{2.59}$$

方程(2.59)与(2.55)是互为共轭的，而$K''(x,\ s)$是退化核，由上面讨论可知，(2.59)与方程(2.55)也与(2.53)有相同个数的解．其次，由于公式(2.57)及(2.58)，方程(2.59)与(2.54)的解之间建立了一一对应关系，且线性无关解对应于线性无关解，从而相互共轭的齐次方程(2.53)和(2.54)有相同个数的线性无关解．这就证明了 Fredholm 第三定理．

定理2.7 设λ_0是核$K(x,\ s)$的一个特征值，则非齐次方程

$$\varphi(x)-\lambda_0\int_a^b K(x,\ s)\varphi(s)\,ds=f(x) \tag{2.60}$$

有解的充分必要条件为：这方程的自由项$f(x)$与共轭齐次方程

$$\psi(x)-\overline{\lambda}_0\int_a^b \overline{K(s,\ x)}\psi(s)\,ds=0$$

的一切特征函数成正交．

证明 先证必要条件：设λ_0是齐次方程(2.53)的特征值，且

$\psi(x)$ 是共轭齐次方程的任意解. 设非齐次方程(2.60)有解, 作 $f(x)$ 与 $\psi(x)$ 的数量积:

$$(f,\ \psi)=(\varphi-\lambda_0 K\varphi,\ \psi)=(\varphi,\ \psi)-\lambda_0(K\varphi,\ \psi),$$

由前述的关于共轭算子的性质(i),上式又可写为

$$(f,\ \psi)=(\varphi,\ \psi)-\lambda_0(\varphi,\ K^*\psi).$$

将右端的两个数量积并为一个,注意到常数因子 λ_0 在数量积内属于第二个因子,合并后写为 $\bar{\lambda}_0$, 则有

$$(f,\ \psi)=(\varphi,\ \psi-\bar{\lambda}_0 K^*\psi),$$

由于方程(2.54),上式右端的数量积内的第二个因子等于零,于是 $(f,\ \psi)=0$.

证充分条件: 设 $\varphi_i(x)$ 和 $\psi_i(x)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 分别是互为共轭的齐次方程(2.53)和(2.54)的所有线性无关解, 并不妨认为它们都已正交标准化*). 作新的核

$$\widetilde{K}(x,\ s)=K(x,\ s)+\sum_{j=1}^{m}\overline{\varphi_j(s)}\psi_j(x)$$

与积分方程

$$\widetilde{L}\varphi=\varphi(x)-\lambda_0\int_a^b\widetilde{K}(x,\ s)\varphi(s)ds=f(x).\qquad(2.61)$$

我们证明 λ_0 不是这个方程的特征值, 即对此 λ_0, $\widetilde{L}\varphi=0$ 没有非零解. 事实上,假设它有解 $\varphi_0(x)$, 则有

$$\begin{aligned}(\widetilde{L}\varphi_0,\ \psi_i)&=(\varphi_0-\lambda_0 K\varphi_0,\ \psi_i)-\lambda_0(\varphi_0,\ \varphi_i)\\&=(\varphi_0,\ \psi_i-\bar{\lambda}_0 K^*\psi_i)-\lambda_0(\varphi_0,\ \psi_i)\\&=-\lambda_0(\varphi_0,\ \varphi_i)=0,\end{aligned}$$

因为 $\lambda_0\neq 0$, 所以

$$(\varphi_0,\ \varphi_i)=0\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m).$$

由此得知 $\varphi_0(x)$ 适合方程

*) 所谓线性无关函数 $\varphi_1(x)$, $\cdots$, $\varphi_m(x)$ 为正交标准的,是指: 如果

$$(\varphi_j,\ \varphi_k)=\begin{cases}0, 当\ j\neq k;\\1, 当\ j=k.\end{cases}$$

任意的线性无关函数列 $\varphi_1(x)$, $\cdots$, $\varphi_m(x)$ 都可以正交标准化, 其方法可参见第四章 §2.

$$\tilde{L}\varphi=\varphi(x)-\lambda_0\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\mathrm{d}s=0,$$

于是 $\varphi_0(x)$ 可由 $\varphi_i(x)$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ 的线性组合表示为

$$\varphi_0(x)=\sum_{j=1}^m c_j\varphi_j(x).$$

再由$(\varphi_0, \varphi_i)=0$, 又得 $c_i=0$ $(i=1, 2, \cdots, m)$, 即齐次方程 $\tilde{L}\varphi=0$ 的任意解 $\varphi_0(x)\equiv 0$.

这样一来,非齐次方程(2.61)对任意右端都有唯一解,设它的解为 $\varphi(x)$,则它适合方程

$$\tilde{L}\varphi=L\varphi-\lambda_0\sum_{j=1}^m \psi_j(x)(\varphi, \varphi_j)=f(x)$$

或
$$L\varphi=f(x)+\lambda_0\sum_{j=1}^m \psi_j(x)(\varphi, \varphi_j).$$

于是

$$\begin{aligned}(L\varphi, \psi_i)&=(f, \psi_i)+\lambda_0\sum_{j=1}^m (\psi_j, \psi_i)(\varphi, \varphi_j)\\&=(f, \psi_i)+\lambda_0(\varphi, \varphi_i).\end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 满足充分条件$(f, \psi_i)=0$, 故可得

$$\lambda_0(\varphi, \varphi_i)=(L\varphi, \psi_i)=(\varphi, L^*\psi_i)=0,$$

即有
$$(\varphi, \varphi_i)=0 \quad (i=1, 2, \cdots, m).$$

这就是说: $\varphi(x)$同样是方程 (2.60) 的解, 换言之, 非齐次方程(2.60)可解. 这也就证明了 Fredholm 第四定理.

值得指出,若 λ_0 是一个特征值,且方程(2.60)有解,则它有无穷多个解,它的通解可以写成

$$\Phi(x)=\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\cdots+c_m\varphi_m(x), \quad (2.62)$$

其中 $\varphi_0(x)$ 是非齐次方程 (2.60) 的一个特解: $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\cdots$ $\varphi_m(x)$是对应于齐次方程的所有线性无关的特征函数系.

从上述 Fredholm 诸定理, 显示出下述 Fredholm 交比定理成立:

Fredholm 交比定理 或者有任意自由项的非齐次积分方程有解,或者和它对应的齐次方程有不恒等于零的解.

在积分方程的研究中，我们经常要用到 Fredholm 交比定理.

§6 Fredholm 公式

在 §1 中建立的解核的表示式

$$\Gamma(x, s; \lambda)=\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^{m-1}K_m(x, s), \tag{2.63}$$

它对较小的 λ 值是有效的，即当 $|\lambda|<B^{-1}$ 时，级数(2.63)对于一切变量 x 和 s 是绝对收敛且一致收敛的. 本节还要寻求解核的另一个解析式，这个解析式对于参数 λ 的一切正则值是有效的.

下面假设核 $K(x, s)$ 是有界的，即存在正常数 M，使得对一切变量 x, s 有

$$|K(x, s)|<M.$$

我们称下列 $D(\lambda)$ 为 Fredholm 行列式:

$$D(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}d_n, \tag{2.64}$$

其中

$$d_n=\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K\begin{pmatrix}t_1, & t_2, & \cdots, & t_n\\ t_1, & t_2, & \cdots, & t_n\end{pmatrix}dt_1\,dt_2\cdots dt_n, \tag{2.65}$$

而

$$K\begin{pmatrix}t_1, & t_2, & \cdots, & t_n\\ t_1, & t_2, & \cdots, & t_n\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}K(t_1, t_1) & K(t_1, t_2) & \cdots & K(t_1, t_n)\\ K(t_2, t_1) & K(t_2, t_2) & \cdots & K(t_2, t_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ K(t_n, t_1) & K(t_n, t_2) & \cdots & K(t_n, t_n)\end{vmatrix}. \tag{2.66}$$

应用 Hadamard 引理[*]，能够证明级数(2.64)对一切复数 λ 都是收敛的，即它是 λ 的整函数.

---

*) Hadamard 引理：设行列式

$$\Delta=\det|a_{jk}| \quad (j, k=1, 2, \cdots, n),$$

则
$$|\Delta|^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}|a_{1k}|^2\cdot\sum_{k=1}^{n}|a_{2k}|^2\cdots\sum_{k=1}^{n}|a_{nk}|^2,$$

特别地，若所有 $|a_{jk}|\leqslant M$，就有 $|\Delta|^2\leqslant n^nM^{2n}$，即 $|\Delta|\leqslant M^n n^{n/2}$.

事实上，由 Hadamard 引理知，当 $|K(x, s)|<M$ 时，有估计式

$$\left|K\begin{pmatrix}t_1, & t_2, & \cdots, & t_n\\ t_1, & t_2, & \cdots, & t_n\end{pmatrix}\right|\leqslant M^n n^{\frac{n}{2}}$$

和
$$|d_n|\leqslant n^{\frac{n}{2}}[M(b-a)]^n.$$

所以级数(2.64)的一般项的绝对值不超过下面的正数：

$$\frac{|\lambda|^n}{n!}n^{\frac{n}{2}}[M(b-a)]^n.$$

应用 D'Alembert 判别法，由这些正数作成的级数的前后项之比

$$\frac{|\lambda|}{n+1}\cdot\frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{n^{\frac{n}{2}}}M(b-a)=\frac{|\lambda|M(b-a)}{\sqrt{n+1}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$$

当 $n\to\infty$ 时趋于零，从而推知级数(2.64)关于一切复数 λ 是绝对收敛且一致收敛的.

现在将 $D(\lambda)$ 乘以级数(2.63)又得到一个级数，记为 $D(x, s;\lambda)$，由(2.16)式得

$$D(x, s;\lambda)=K(x, s)D(\lambda)+\lambda\int_a^b K(x, t)D(t, s;\lambda)\mathrm{d}t.\quad(2.67)$$

显然，在 $|\lambda|<\dfrac{1}{M(b-a)}$ 内，由于 $D(\lambda)$ 和 $\Gamma(x, s;\lambda)$ 都是绝对收敛和一致收敛的幂级数，所以可以用两个级数的简单相乘的方法得到级数

$$D(x, s;\lambda)=K(x, s)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}d_n(x, s),\quad(2.68)$$

其中 $d_n(x, s)$ 可以利用等式(2.67)比较 λ 的同次幂系数而得到，它是

$$d_n(x, s)=K(x, s)d_n-n\int_a^b K(x, t)d_{n-1}(t, s)\mathrm{d}t,\quad(2.69)$$

$$d_0(x, s)=K(x, s).$$

(2.69)式给出了逐次计算系数 $d_n(x, s)$ 的递推公式.

注意到在(2.69)式，当 $n=1$ 时，有

$$d_1(x,\ s)=K(x,\ s)\int_a^b K\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}\mathrm{d}t-\int_a^b K(x,\ t)K(t,\ s)\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^b [K(x,\ s)K(t,\ t)-K(x,\ t)K(t,\ s)]\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^b K\begin{pmatrix} x, & t \\ s, & t \end{pmatrix}\mathrm{d}t.$$

假设对 $n-1$ 成立，即：

$$d_{n-1}(x,\ s)=\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K\begin{pmatrix} x, & t_1, & \cdots, & t_{n-1} \\ s, & t_1, & \cdots, & t_{n-1} \end{pmatrix}\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_{n-1},$$

这时对于 n，利用递推公式(2.69)，就有

$$d_n(x,\ s)=K(x,\ s)d_n-n\int_a^b K(x,\ t_1)d_{n-1}(t_1,\ s)\mathrm{d}t_1$$

$$=\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(x,\ s)K\begin{pmatrix} t_1, & t_2, & \cdots, & t_n \\ t_1, & t_2, & \cdots, & t_n \end{pmatrix}\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n$$

$$-n\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(x,\ t_1)\cdot K\begin{pmatrix} t_1, & t_2, & \cdots, & t_n \\ s, & t_2, & \cdots, & t_n \end{pmatrix}\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n, \tag{2.70}$$

将行列式 $K\begin{pmatrix} x, & t_1, & t_2, & \cdots, & t_n \\ s, & t_1, & t_2, & \cdots, & t_n \end{pmatrix}$ 按第一行的元素展开：

$$K\begin{pmatrix} x, & t_1, & \cdots, & t_n \\ s_1, & t_1, & \cdots, & t_n \end{pmatrix}$$

$$=K(x,\ s)K\begin{pmatrix} t_1, & t_2, & \cdots, & t_n \\ t_1, & t_2, & \cdots, & t_n \end{pmatrix}-K(x,\ t)K\begin{pmatrix} t_1, & t_2, & \cdots, & t_n \\ s, & t_2, & \cdots, & t_n \end{pmatrix}+\cdots$$

$$+(-1)^n K(x,\ t_n)K\begin{pmatrix} t_1, & \cdots, & t_{n-1}, & t_n \\ s, & \cdots, & t_{n-2}, & t_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$=K(x,\ s)K\begin{pmatrix} t_1, & t_2, & \cdots, & t_n \\ t_1, & t_2, & \cdots, & t_n \end{pmatrix}-K(x,t_1)K\begin{pmatrix} t_1, & t_2, & \cdots, & t_n \\ s, & t_2, & \cdots, & t_n \end{pmatrix}-\cdots$$

$$-K(x,\ t_n)K\begin{pmatrix} t_1, & t_2, & \cdots, & t_{n-1}, & t_n \\ t_1, & t_2, & \cdots, & t_{n-1}, & s \end{pmatrix},$$

将这关系式的两端对一切 t_i 取积分，并适当改变积分的记号，即

得

$$\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K\begin{pmatrix} x, & t_1, & \cdots, & t_n \\ s, & t_1, & \cdots, & t_n\end{pmatrix} dt_1 dt_2\cdots dt_n$$

$$= K(x, s)\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K\begin{pmatrix} t_1, & t_2, & \cdots, & t_n \\ t_1, & t_2, & \cdots, & t_n\end{pmatrix} dt_1 dt_2\cdots dt_n$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(x, t_k)$$

$$\cdot K\begin{pmatrix} t_1, & \cdots, & t_{k-1}, & t_k, & t_{k+1}, & \cdots & t_n \\ t_1, & \cdots, & t_{k-1}, & s, & t_{k+1}, & \cdots, & t_n\end{pmatrix} dt_1 dt_2\cdots dt_n$$

$$= K(x, s)d_n - n\int_a^b\int_a^b\cdots$$

$$\cdot\int_a^b K(x, t_1)K\begin{pmatrix} t_1, & t_2, & \cdots, & t_n \\ t_1, & t_2, & \cdots, & t_n\end{pmatrix} dt_1 dt_2\cdots dt_n.$$

联系(2.70)式，按数学归纳法，即可证得对于任意的正整数 n，均有

$$d_n(x, s) = \int_a^b\int_a^b\cdots$$

$$\cdot\int_a^b K\begin{pmatrix} x, & t_1, & t_2, & \cdots, & t_n \\ s, & t_1, & t_2, & \cdots, & t_n\end{pmatrix} dt_1 dt_2\cdots dt_n. \qquad (2.71)$$

于是，同样应用 Hadamard 引理于(2.71)式，可得估计式

$$|d_n(x, s)| \leqslant (n+1)^{\frac{n+1}{2}} M^{n+1}(b-a)^n,$$

从而，同证明级数(2.64)一样，可证明级数(2.68)关于一切复数 λ 是绝对收敛且一致收敛的。

进而得到以下的 Fredholm 公式

$$\Gamma(x, s; \lambda) = \frac{D(x, s; \lambda)}{D(\lambda)}, \qquad (2.72)$$

这公式给出了解核函数 $\Gamma(x, s; \lambda)$ 在复数 λ 的全平面上的解析延拓，且显示解核是 λ 的半纯函数。

(2.72)中的 $D(x, s; \lambda)$ 称为 Fredholm 的一阶子式；$D(\lambda)$ 称为 Fredholm 分母．这两者又都称为 Fredholm 级数．

注 3 如果核 $K(x, s)$ 关于变量 x, s 是平方绝对可积的函

数，上面的结论可以证明仍然有效．请参阅下列论文：T. Carleman, Math, Zeit, Vol. 9, H. 3/4, 1921; C. Г. Михлин, ДАН СССР，том 62, № 9, 1944.

这样一来，可以得到以下一些定理：

定理2.8 解核 $\Gamma(x, s; \lambda)$ 可以用在 λ 全平面上为绝对收敛且一致收敛的 Fredholm 级数 $D(x, s; \lambda)$ 和 $D(\lambda)$ 的商表示之．这两个级数的系数 $d_n(x, s)$ 和 d_n 之间有如下的关系式：

$$d_{n+1}=\int_a^b d_n(s, s)ds. \tag{2.73}$$

定理2.9 解核 $\Gamma(x, s; \lambda)$ 在 λ 全平面上是半纯函数，解核的极点都是 $D(\lambda)$ 的零点；反之，函数 $D(\lambda)$ 的所有零点都是解核的极点．

证明 这个定理的前半部由关系式(2.72)显然可知．定理的后半部分，可证明如下：

设 λ_0 是 $D(\lambda)$ 的 k 阶零点，也即

$$D(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^k D_0(\lambda), \quad D_0(\lambda_0)\neq 0.$$

又设 λ_0 也是 $D(x, s; \lambda)$ 的 l 阶零点，也即

$$D(x, s; \lambda)=(\lambda-\lambda_0)^l D_0(x, s; \lambda),$$

其中 $D_0(x, s; \lambda)$ 是按 $\lambda-\lambda_0$ 的非负整数幂的幂级数，它的自由项对某些值 x, s 不为零．

注意到，由(2.73)式，又不难得到一般公式

$$D'(\lambda)=-\int_a^b D(s, s; \lambda)ds, \tag{2.74}$$

所以对以 λ_0 为零点的 $D(x, s; \lambda)$，有

$$D'(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^l\int_a^b D_0(s, s; \lambda)ds.$$

这里按假设，左端有 $k-1$ 阶零点 $\lambda=\lambda_0$；而右端已有因子 $(\lambda-\lambda_0)^l$，因此必有 $l\leqslant k-1$．这说明若 $\lambda=\lambda_0$ 也是表达式 (2.72) 分子的零点，则在任何情况下这零点的阶数小于 k，从而得知整个分式 (2.72) 有极点 $\lambda=\lambda_0$，即 $D(\lambda)$ 的零点 $\lambda=\lambda_0$ 也是解核 $\Gamma(x, s; \lambda)$ 的极点．定理证毕．

定理2.10 解核 $\Gamma(x, s; \lambda)$ 的极点都是齐次方程 (2.51) 的特征值；反之，齐次方程(2.51)的每一个特征值都是解核的极点.

证明 设 $\lambda=\lambda_0$ 是解核 $\Gamma(x, s; \lambda)$ 的 r 阶极点，则它在 $\lambda=\lambda_0$ 点的邻域可以展为下式：

$$\Gamma(x, s; \lambda)=\frac{a_{-r}(x, s)}{(\lambda-\lambda_0)^r}+\frac{a_{-r+1}(x, s)}{(\lambda-\lambda_0)^{r-1}}+\cdots+\frac{a_1(x, s)}{(\lambda-\lambda_0)}$$

$$+\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x, s)(\lambda-\lambda_0)^i,$$

其中系数 $a_{-r}(x, s)$ 在 $x, s\in[a, b]$ 内不恒等于零. 将这个展开式代入(2.16)的第一式，两端乘以 $(\lambda-\lambda_0)^r$，然后令 $\lambda=\lambda_0$，即得

$$a_{-r}(x, s)=\lambda_0\int_a^b K(x, t)a_{-r}(t, s)\mathrm{d}t.$$

这表明系数 $a_{-r}(x, s)$ 看作 x 的函数对于变量 s 的任何值都是齐次方程(2.51)的解. 又因为 $a_{-r}(x, s)$ 不恒为零，故 λ_0 是齐次方程(2.51)的特征值.

反之，设 λ_0 是齐次方程(2.51)的特征值，我们应证明，它必是解核的极点. 否则，解核在 λ_0 点就是全纯的. 令 $\psi_0(x)$ 是共轭方程

$$\psi(x)-\bar{\lambda}_0\int_a^b \overline{K(s, x)}\psi(s)\mathrm{d}s=0$$

的特征函数，由 Fredholm 第四定理知，方程

$$\varphi(x)-\lambda_0\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\mathrm{d}s=\psi_0(x) \tag{2.75}$$

没有解. 现在设 λ 是与 λ_0 近似的一个正则值，方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\mathrm{d}s=\psi_0(x) \tag{2.76}$$

有解，这个解可表示为

$$\varphi(x)=\psi_0(x)+\lambda\int_a^b \Gamma(x, s; \lambda)\psi_0(s)\mathrm{d}s,$$

将它代入(2.76)，得

$$\psi_0(x)+\lambda\int_a^b \Gamma(x, s; \lambda)\psi_0(s)\mathrm{d}s-$$

$$-\lambda\int_a^b K(x,\ s)\left\{\psi_0(s)+\lambda\int_a^b \Gamma(s,\ t;\ \lambda)\psi_0(t)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}s=\psi_0(x).$$

因解核在 $\lambda=\lambda_0$ 点是全纯的，故可在积分号下取 $\lambda\to\lambda_0$ 的极限，于是得到

$$\psi_0(x)+\lambda_0\int_a^b \Gamma(x,\ s;\ \lambda_0)\psi_0(s)\mathrm{d}s$$

$$-\lambda_0\int_a^b K(x,\ s)\left\{\psi_0(s)+\lambda_0\int_a^b \Gamma(t,\ s;\ \lambda_0)\psi_0(t)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}s=\psi_0(x).$$

这样，方程(2.76)就有解，它等于

$$\psi_0(x)+\lambda_0\int_a^b \Gamma(x,\ s;\ \lambda_0)\psi_0(s)\mathrm{d}s.$$

这就导致矛盾．由于这个矛盾，就证明了定理的结论．

有了定理 2.9 和 2.10，立即可推得：

定理 2.11 函数 $D(\lambda)$ 的一切零点都是齐次积分方程(2.51)的特征值；反之，齐次方程(2.51)的特征值也都是 $D(\lambda)$ 的零点．

例 3 求核

$$K(x,\ s)=x+s \tag{2.77}$$

的解核 $\Gamma(x,\ s;\ \lambda)$．

按前面所述，有

$$d_0=1,\quad d_0(x,\ s)=x+s,$$

$$d_1=\int_0^1 2s\,\mathrm{d}s=1,$$

$$d_1(x,\ s)=x+s-\int_0^1 (x+t)(t+s)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(x+s)-xs-\frac{1}{3},$$

$$d_2=\int_0^1\left(s-s^2-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{6},$$

$$d_2(x,\ s)=-\frac{1}{6}(x+s)-2\int_0^1 (x+t)\left[\frac{1}{2}(t+s)-ts-\frac{1}{3}\right]\mathrm{d}t=0,$$

进而有 $\quad d_3=d_4=\cdots=0,\quad d_3(x,\ s)=d_4(x,\ s)=\cdots=0.$

于是得到 $\quad D(x,\ s;\ \lambda)=x+s-\left[\frac{1}{2}(x+s)-xs-\frac{1}{3}\right]\lambda,$

$$D(\lambda)=1-\lambda-\frac{\lambda^2}{12},$$

$$\Gamma(x,\ s;\ \lambda)=\frac{x+s-\left[\frac{1}{2}(x+s)-xs-\frac{1}{3}\right]\lambda}{1-\lambda-\frac{\lambda^2}{12}}, \qquad (2.78)$$

例 4 求方程

$$\varphi(x)+\lambda\int_0^1 e^{x+s}\varphi(s)ds=f(x) \qquad (2.79)$$

的解核.

因核 $K(x,\ s)=e^{x+s}=d_0(x,\ s)$, 所以

$$d_0=1,\ d_1=-\int_0^1 e^{2s}\mathrm{d}s=\frac{1}{2}(1-e^2),$$

$$d_1(x,\ s)=-e^{x+s}\frac{1}{2}(1-e^2)-\int_0^1 e^{x+2t+s}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}(e^2-1)e^{x+s}-e^{x+s}\int_0^1 e^{2t}\,\mathrm{d}t=0,$$

从而 $\quad d_n=0(n\geqslant 2);\quad d_n(x,\ s)=0\quad(n\geqslant 1).$

于是有

$$D(\lambda)=1+\frac{\lambda}{2}(e^2-1),$$

$$D(x,\ s;\lambda)=-e^{x+s},$$

$$\Gamma(x,\ s;\ \lambda)=\frac{D(x,\ s;\ \lambda)}{D(\lambda)}=-\frac{2e^{x+s}}{2+\lambda(e^2-1)}.$$

这样,我们就可写出方程(2.79)的解 $\varphi(x)$ 为

$$\varphi(x)=f(x)-\lambda\int_0^1\frac{2e^{x+s}}{2+\lambda(e^2-1)}f(s)\mathrm{d}s. \qquad (2.80)$$

§7 所得结果的推广

在前面的积分方程理论的叙述中,我们假设未知函数 $\varphi(x)$和自由项 $f(x)$ 都是单变量 x 的函数, 这个变量在区间 $[a,\ b]$ 内变化, 此区间也是核 $K(x,\ s)$ 的两个变量 $x,\ s$ 的变化区间. 若设函数 $\varphi(M)$ 和 $f(M)$ 都是任意维有限区域内或某个光滑曲面上或某条光滑曲线上的点的函数; 而核 $K(M,\ N)$ 是一对点M及 N 的函数,这对点在上面所提到的区域内或曲面上或曲线上变动,且在

积分方程中的积分为展布在所提到的区域内或曲面上或曲线上的积分，因而积分方程可以写为如下形式：

$$\varphi(M)=f(M)+\lambda\int K(M,\ N)\varphi(N)\mathrm{d}\omega_N,$$

这里我们只写出一个积分符号，但要理解为这个积分是对于所提到的区域或曲面或曲线上的积分，而 $\mathrm{d}\omega_N$ 是相应的体积元素或面积元素或曲线上的弧素，则前面几节所叙述的理论仍保持成立。如设变点经过的不是一个线段或一个区域，而是几个分离的线段或区域，前面所述理论也是依然成立的。

§8 弱奇性积分方程

前面已经指出，所谓弱奇性积分方程就是它的核有以下形式：

$$K(x,\ s)=\frac{H(x,\ s)}{|x-s|^{\alpha}},$$

其中 $0<\alpha<1$，且 $H(x,\ s)$ 是一个有界函数。

若在 n 维空间中的有限区域 Ω 内考虑积分方程，则弱奇性核为

$$K(M,\ M_1)=\frac{H(M,\ M_1)}{r^{\alpha}}\quad(0<\alpha<n),\qquad(2.81)$$

其中 M 及 M_1 为 Ω 内的任意两点，r 为这两点间的距离。关于弱奇性积分方程的理论和 Fredholm 的理论是几乎完全相同的。下面我们证明 Fredholm 诸定理以及 Fredholm 交比定理对于弱奇性方程皆保持有效。

定理2.12 设

$$|P(M,\ M_1)|<\frac{A_1}{r^{\alpha}},\ |Q(M,\ M_1)|<\frac{A_2}{r^{\beta}},$$

其中 A_1 及 A_2 是正常数，且 $0\leqslant\alpha<n$，$0\leqslant\beta<n$。则对于核

$$K(M,\ M_1)=\int_{\Omega}P(M,\ M_2)Q(M_2,\ M_1)\mathrm{d}M_2$$

有下面估计：

$$|K(M,\ M_1)|<\begin{cases}C, & 当\ \alpha+\beta<n;\\ C|\ln r|+C_1, & 当\ \alpha+\beta=n;\\ \dfrac{C}{r^{\alpha+\beta-n}}, & 当\ \alpha+\beta>n.\end{cases} \tag{2.82}$$

其中 C 与 C_1 是正常数.

证明 以 r_0 和 r_1 分别表示距离 $\overline{MM_2}$ 和 $\overline{M_1M_2}$, 以 h 表示不小于区域 Ω 的直径的任一值,则

$$|K(M,\ M_1)|<A_1A_2\int_\Omega \frac{dM_2}{r_0^\alpha r_1^\beta}\leqslant A_1A_2\int_{r_0<h}\frac{dM_2}{r_0^\alpha r_1^\beta}. \tag{2.83}$$

若 $\alpha+\beta<n$, 则(2.83)中的积分是一致收敛的, 因此是一有限值. 这样就证得了(2.82)中的第一种情况.

若 $\alpha+\beta\geqslant n$, 这时不妨设 M 点是原点, 且从 M 点引经 M_1 点的一条直线作为坐标轴 x_1, 使从 M 点到 M_1 点的方向是正向. 于是 M 和 M_1 点的坐标分别是 $(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ 和 $(r,\ 0,\ \cdots,\ 0)$. 以 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 表示 M_2 点的坐标, 就有

$$r_0^2=\sum_{k=1}^n x_k^2,\quad r_1^2=(x_1-r)^2+\sum_{k=2}^n x_k^2.$$

将 (2.83) 中的积分作变换 $x_k=r\xi_k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, 则不等式(2.83)变为

$$|K(M,\ M_1)|<\frac{A_1A_2}{r^{\alpha+\beta-n}}\int_{\rho<\frac{h}{r}}\frac{d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_n}{\rho^\alpha\left[(\xi_1-1)^2+\sum\limits_{k=2}^n\xi_k^2\right]^{\beta/2}}, \tag{2.84}$$

其中 $\rho=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^n\xi_k^2}$ 现在对(2.84)中的积分作出估计, 有

$$d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_n=\rho^{n-1}d\rho\, dS,$$

其中 dS 是在坐标为 $\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n$ 的空间内单位超球面上的面积元素. 其次

$$(\xi_1-1)^2+\sum_{k=2}^n\xi_k^2=\rho^2-2\xi_1+1\geqslant(\rho-1)^2,$$

当 $\rho>2$ 时, 不难推知 $(\rho-1)^2>\frac{1}{4}\rho^2$, 于是有

$$(\xi_1-1)^2+\sum_{k=2}^n\xi_k^2>\frac{1}{4}\rho^2.$$

这样一来，就有

$$|K(M,\ M_1)|<\frac{A_1A_2}{r^{\alpha+\beta-n}}\left\{\int_{\rho<2}\frac{\rho^{n-1-\alpha}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}S}{\left[(\xi_1-1)^2+\sum_{k=2}^{n}\xi_k^2\right]^{\beta/2}}\right.$$

$$\left.+2^\beta\int_{2<\rho<h/r}\rho^{n-1-\alpha-\beta}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}S,\right\} \tag{2.85}$$

花括弧内的第一个积分是一个常数，而当 $\alpha+\beta>n$ 时，第二个积分小于

$$2^\beta S\int_2^\infty\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^{\alpha+\beta+1-n}}=\frac{2^{n-\alpha}S}{\alpha+\beta-n},$$

其中 S 是单位超球面的面积．于是 (2.85) 中花括弧内的两个积分之和小于某一常数，因此在 $\alpha+\beta>n$ 的情况也得到证明．

最后，若 $\alpha+\beta=n$，则 (2.85) 中花括弧内第二个积分等于

$$2^\beta S\int_2^{h/r}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=2^\beta S\ln\frac{h}{2r}.$$

因此也证明了 (2.82) 中的第二种情况．定理证毕．

定理 2.13 *如果核是弱奇性的，则从某一个迭核以后的一切迭核是有界的．*

证明 若核 $K(M,\ M_1)$ 具有形式 (2.81)，则从定理 2.12 可知，它的 m 次迭核有以下估计：

$$|K_m(M,\ M_1)|<\begin{cases}\dfrac{C_m}{r^{m\alpha-(m-1)n}}, & 当\ m\alpha-(m-1)n>0\ 时,\\ C_m, & 当\ m\alpha-(m-1)n<0\ 时,\end{cases}$$

其中 c_m 是一个正常数．于是，若取 m 为适合以下不等式

$$m>\frac{n}{n-\alpha} \tag{2.86}$$

的任一整数，则 $K_m(M,\ M_1)$ 就是有界函数了，定理得证．

现在证明对于弱奇性方程的 Fredholm 四个定理．

先引进记号，用 $E\varphi$ 表示任一函数 $\varphi(M)$，即

$$E\varphi=\varphi(M).$$

这样就可写为

$$\varphi(M)-\lambda\int_\Omega K(M,\ M_1)\varphi(M_1)\mathrm{d}M_1=(E-\lambda K)\varphi.$$

若将记号 E 看作 1，则含有算子 K 的乘幂的几个多项式相乘即可看作是寻常多项式相乘. 例如

$$(E-\lambda K)(E+\lambda K)\varphi=(E-\lambda^2K^2)\varphi$$
$$=\varphi(M)-\lambda^2\int_\Omega K_2(M,\ M_1)\varphi(M_1)\mathrm{d}M_1.$$

讨论方程

$$\varphi(M)-\lambda\int_\Omega K(M,\ M_1)\varphi(M_1)\mathrm{d}M_1=f(M),\qquad(2.87)$$

其中核 $K(M,\ M_1)$具有(2.81)的形式. 设m是适合不等式(2.86)的任一整数，则对方程(2.87)

$$(E-\lambda K)\varphi=f(M)$$

两边乘以算子

$$(E-\varepsilon\lambda K)(E-\varepsilon^2\lambda K)\cdots(E-\varepsilon^{m-1}\lambda K)$$
$$=E+\lambda K+\lambda^2K^2+\cdots+\lambda^{m-1}K^{m-1},$$

其中 $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{m}}$，于是得到核为有界的 Fredholm 方程

$$(E-\lambda^mK^m)\varphi=(E+\lambda K+\lambda^2K^2+\cdots+\lambda^{m-1}K^{m-1})f(M),$$

或更详细的写出为

$$\varphi(M)-\lambda^m\int_\Omega K_m(M,\ M_1)\varphi(M_1)\mathrm{d}M_1$$
$$=f(M)+\lambda\int_\Omega K(M,\ M_1)f(M_1)\mathrm{d}M_1$$
$$+\lambda^2\int_\Omega K_2(M,\ M_1)f(M_1)\mathrm{d}M_1+\cdots$$
$$+\lambda^{m-1}\int_\Omega K_{m-1}(M,\ M_1)f(M_1)\mathrm{d}M_1.\qquad(2.88)$$

显然方程 (2.87) 的一切解都满足方程(2.88). 反之，却不一定. 也就是说方程(2.88)可能有解不满足方程(2.87).

同样定义特征值：若有一值 λ_0 使得下面的积分方程

$$(E-\lambda_0K)\varphi=0$$

有不恒等于零的解，则 λ_0 称为核 $K(M,\ M_1)$ 的一个特征值.

这时有：

1° 设 λ_0 是核 $K(M, M_1)$ 的一个特征值，且设 λ_0 在圆 $|\lambda| \leqslant R$ 内（R 为任一正数）．以 $\varphi_0(M)$ 表示与 λ_0 对应的特征函数，因而有

$$\varphi_0(M)-\lambda_0\int_\Omega K(M, M_1)\varphi_0(M_1)\mathrm{d}M_1=0. \tag{2.89}$$

由前面的讨论可知道，$\varphi_0(M)$ 也满足以下方程：

$$\varphi_0(M)-\lambda_0^m\int_\Omega K_m(M, M_1)\varphi_0(M_1)\mathrm{d}M_1=0, \tag{2.90}$$

由此可见，λ_0^m 是核 $K_m(M, M_1)$ 的特征值．但后者是有界核，它在半径为 R 的圆内仅有有限个特征值，于是 $K(M, M_1)$ 在圆 $|\lambda| \leqslant R$ 内也仅有有限个特征值．Fredholm 第一定理得证．

2° 设(2.87)及(2.88)的齐次方程分别有 r 个及 r' 个线性无关解．因前者的每一个解都满足后者，故 $r\leqslant r'$．但(2.88)式是表示有界核的 Fredholm 方程，所以 r' 必然是有限的，从而 r 也是有限的．这表明 Fredholm 第二定理是成立的．

3° 设方程(2.87)的共轭齐次方程 $(E-\bar{\lambda}_0K^*)\psi=0$ 有 r^* 个线性无关解．现选择大于 $\dfrac{n}{n-\alpha}$ 的整数 m，使下面诸数

$$\varepsilon\lambda_0, \ \varepsilon^2\lambda_0, \ \cdots, \ \varepsilon^{m-1}\lambda_0$$

的任一数都不是核 $K(M, M_1)$ 的特征值．这样，m 值的选择是恒为可能的，否则，若这样的 m 不存在，则在圆周 $|\lambda|=|\lambda_0|$ 上核 $K(M, M_1)$ 有无穷多个特征值，这就违背了 Fredholm 第一定理．当这样的 m 选定后，可以证明，方程(2.89)和(2.90)是等价的．

事实上，可将(2.90)写成以下形式：

$$(E-\varepsilon\lambda_0K)\prod_{\alpha=2}^{m}(E-\varepsilon^\alpha\lambda_0K)\varphi_0=0,$$

若记
$$\prod_{\alpha=2}^{m}(E-\varepsilon^\alpha\lambda_0K)\varphi_0=\varphi_1(M),$$

则有
$$(E-\varepsilon\lambda_0K)\varphi_1=0,$$

但 $\varepsilon\lambda_0$ 不是特征值，故 $\varphi_1(M)=0$，或

$$\prod_{\alpha=2}^{m}(E-\varepsilon^\alpha\lambda_0K)\varphi_0=0.$$

现在，再记 $\prod_{\alpha=3}^{m}(E-\varepsilon^{\alpha}\lambda_0 K)\varphi_0=\varphi_3(M)$，同样可证，$\varphi_3(M)=0$.

这样继续有限次以后，可得

$$(E-\varepsilon^{m}\lambda_0 K)\varphi_0=(E-\lambda_0 K)\varphi_0=0.$$

这就是说方程(2.90)的解 $\varphi_0(M)$ 也适合方程(2.89).

因而方程(2.89)和(2.90)是等价的，故当方程(2.89)的线性无关解的个数为 r 时，方程(2.90)的线性无关解的个数也等于 r. 由 Fredholm 第三定理，方程(2.90)的共轭方程

$$(E-\bar{\lambda}_0 K^{*m})\omega=0 \tag{2.91}$$

也有相同个数的线性无关解．类似于 2° 中的讨论，共轭方程

$$(E-\bar{\lambda}_0 K^{*})\psi=0$$

的一切解都适合方程(2.91)，所以有 $r^*\leqslant r$.

同样，由于方程(2.89)和 $(E-\bar{\lambda}_0 K^{*})\psi=0$ 是互为共轭的，又可证得 $r^*\geqslant r$.

最后得到 $r^*=r$，这就证明了 Fredholm 第三定理.

4° 证明 Fredholm 第四定理：必要条件的证明和以前完全相同，这里仅须证明条件是充分的.

类似于前面，我们可选择 $m>\frac{n}{n-\alpha}$，且使 $\varepsilon\lambda_0$, $\varepsilon^2\lambda_0$, $\cdots$, $\varepsilon^m\lambda_0$ 都不是核 K 的特征值．这时，方程(2.87)和(2.88)就完全等价了．事实上，由(2.88)，有

$$(E-\lambda_0^m K^m)\varphi-\prod_{\alpha=1}^{m-1}(E-\varepsilon^{\alpha}\lambda_0 K)f=0,$$

或写为 $(E-\lambda_0\varepsilon K)\left[\prod_{\alpha=2}^{m}(E-\varepsilon^{\alpha}\lambda_0 K)\varphi-\prod_{\alpha=2}^{m-1}(E-\varepsilon^{\alpha}\lambda_0 K)f\right]=0.$

但 $\lambda_0\varepsilon$ 不是核 K 的特征值，故有

$$\varphi_1(M)=\prod_{\alpha=2}^{m-1}(E-\varepsilon^{\alpha}\lambda_0 K)\left[(E-\lambda_0 K)\varphi-f\right]=0.$$

依次类推，可得

$$(E-\lambda_0 K)\varphi-f=0,$$

即方程(2.87)和(2.88)等价.

对于方程(2.88)，可解的充分条件是

$$\left(\prod_{\alpha=1}^{m-1}(E-\varepsilon^{\alpha}\lambda_0 K)f,\ \omega\right)=0, \tag{2.92}$$

其中 ω 表示方程(2.91)的任一解.

记
$$\prod_{\alpha=2}^{m-1}(E-\varepsilon^{\alpha}\lambda_0 K)f=f_1,$$

则有

$$\begin{aligned}0&=((E-\varepsilon\lambda_0 K)f_1,\ \omega)=(f_1,\ \omega)-\varepsilon\lambda_0(Kf_1,\ \omega)\\&=(f_1,\ \omega)-\varepsilon\lambda_0(f_1,\ K^*\omega)=(f_1,\ (E-\overline{\varepsilon\lambda_0}K^*)\omega)\\&=\left(\prod_{\alpha=2}^{m-1}(E-\varepsilon^{\alpha}\lambda_0 K)f,\ (E-\overline{\varepsilon\lambda_0}K^*)\omega\right).\end{aligned}$$

又记
$$\prod_{\alpha=3}^{m-1}(E-\varepsilon^{\alpha}\lambda_0 K)f=f_2,$$

依次类推，可计算得

$$\left(f,\ \prod_{\alpha=1}^{m-1}(E-\overline{\varepsilon^{\alpha}\lambda_0}K^*)\omega\right)=0. \tag{2.93}$$

另一方面，共轭方程(2.91)又可写成

$$\begin{aligned}&\prod_{\alpha=0}^{m-1}(E-\overline{\varepsilon^{\alpha}\lambda_0}K^*)\omega\\&\qquad=(E-\bar{\lambda}_0K^*)\prod_{\alpha=1}^{m-1}(E-\overline{\varepsilon^{\alpha}\lambda_0}K^*)\omega=0,\end{aligned}$$

由此可见，在(2.93)中的数量积的第二个因子就是方程 $(E-\lambda_0 K)\varphi=0$ 的共轭方程的解. 这也就是说，当方程

$$(E-\lambda_0 K)\varphi=f$$

的自由项 $f(M)$ 同它的共轭齐次方程的任一解成正交时可解.

这样，即证明了 Fredholm 第四定理对于弱奇性方程也同样成立.

最后指出，若 λ 不是方程(2.87)的特征值，则称这样的 λ 是正则值. 若 λ 是一个正则值，则方程(2.87)有唯一解. 这是因为齐次方程

$$\psi(M)-\bar{\lambda}_0\int_{\Omega}\overline{K(M_1,\ M)}\psi(M_1)\mathrm{d}M_1=0$$

只有零解. 于是 Fredholm 第四定理的条件对于任意函数 $f(M)$

自然满足，因而方程(2.87)是可解的，又由于齐次方程只有零解，可知方程(2.87)的解是唯一的．

§9 奇异情况

对于某些积分方程，Fredholm定理可能不成立．例如当积分方程的积分区域为无限时，或者积分方程的核不是弱奇性时，就会出现这种情形．这样的积分方程我们称之为属于奇异情形．奇异情形的积分方程不属于本书讨论的范围．

下面举这类积分方程的两个例子来说明之：

例5．形如

$$\varphi(x)=\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x-s|}\varphi(s)\,ds \tag{2.94}$$

的积分方程，当 $\lambda=\dfrac{1+a^2}{2}$ 时，恒有解 $\varphi(x)=e^{aix}$，其中 a 是实数．换言之，一切实数 $\lambda\geqslant\dfrac{1}{2}$ 都是方程(2.94)的特征值．这表明在 λ 的有限区域内，方程(2.94)有无穷多个特征值．

事实上，对任意的实数 a，将 $\varphi=e^{iax}$ 代入方程(2.94)的右端，并引进代换 $x-s=t$，则有

$$\begin{aligned}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x-s|}\varphi(s)\,ds&=\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t|}e^{ia(x-t)}\,dt\\&=\lambda\int_{-\infty}^{0}e^{t}e^{ia(x-t)}\,dt+\lambda\int_{0}^{\infty}e^{-t}e^{ia(x-t)}\,dt\\&=\frac{2\lambda}{1+a^2}\,e^{iax},\end{aligned}$$

因此，当取 $\lambda=\dfrac{1+a^2}{2}$ 时，e^{iax} 便是方程(2.94)的解．

例6．形如

$$\varphi(x)=\lambda\int_{0}^{\infty}\sin(xs)\varphi(s)\,ds \tag{2.95}$$

的积分方程，当取 $\lambda=\pm\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ 时，方程(2.95)便有无穷多个线性无

关解，

$$\varphi(x)=e^{-ax}\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x}{a^2+x^2}, \tag{2.96}$$

式中 a 是任意正数. 以下我们只对$\lambda=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$的情形进行验证；$\lambda=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}$的情形是类似的。

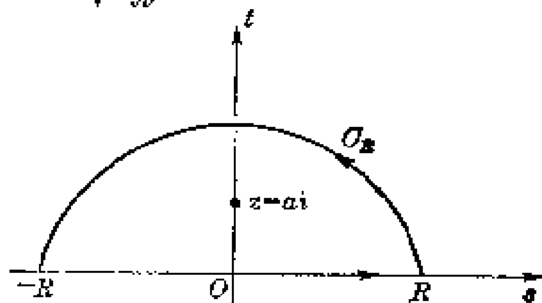


图 2.1

考察复变函数

$$F(z)=-\frac{iz}{a^2+z^2}e^{ixz}$$

$$(z=s+it),$$

式中 $x>0$ 是个参数，显见 $F(z)$ 在上半平面除含有一次极点 $z=ai$ 外是解析的. 任选足够大的 $R>0$，作半圆区域(如图 2.1)。它的边界为直线段$[-R, R]$和半圆周 C_R，应用留数定理可得到

$$\int_{-R}^{R}F(z)\,\mathrm{d}z+\int_{C_R}F(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i\lim_{z\to ai}(z-ai)F(z)=\pi e^{-ax}, \tag{2.97}$$

再计算 $F(z)$ 在 C_R 上的积分，引进极坐标 $z=Re^{i\theta}$，这时有

$$\left|\int_{C_R}F(z)\,\mathrm{d}z\leqslant\int_0^{\pi}\frac{e^{-xR\sin\theta+ixR\cos\theta}R^2e^{2i\theta}\,\mathrm{d}\theta}{a^2+R^2e^{2i\theta}}\right|$$

$$\leqslant\int_0^{2\pi}\frac{e^{-xR\sin\theta}R^2\,\mathrm{d}\theta}{R^2-a^2},$$

当 $R\to\infty$ 时，上式趋于零，由此联系(2.97)式，即得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(z)\,\mathrm{d}z=\pi e^{-ax},$$

进而有 $$\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}F(z)\,\mathrm{d}z=2\int_0^{+\infty}\frac{s\sin(xs)\,\mathrm{d}s}{a^2+s^2}=\pi e^{-ax},$$

即有

$$\int_0^{\infty}\frac{s\sin(xs)\,\mathrm{d}s}{a^2+s^2}=\frac{\pi}{2}e^{-ax}. \tag{2.98}$$

另外，不难得到

$$\int_0^{\infty}e^{-as}\sin(xs)\,\mathrm{d}s=\frac{1}{2i}\int_0^{\infty}\left[e^{(-a+ix)s}-e^{-(a+ix)s}\right]\mathrm{d}s$$

$$=\frac{x}{a^2+x^2}. \tag{2.99}$$

综合以上结果(2.98)和(2.99)，最后得到

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin(xs)\left[e^{-as}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{s}{a^2+s^2}\right]ds=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x}{a^2+x^2}+e^{-ax}.$$

这就证明了当 $\lambda=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ 时，方程(2.95)有解

$$\varphi(x)=e^{-ax}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x}{a^2+x^2}.$$

第三章 积分方程组

在这一章中，要把上一章的结论推广到 Fredholm 积分方程组；还要讨论一类在应用上颇为重要的积分方程，在积分号下出现共轭未知函数，证明对于这类积分方程，Fredholm 诸定理也都成立。

§1 术语和记号

为了后面的需要，这一节里，我们要提一提有关向量和矩阵的一些术语、记号和性质。

考虑某个变量 x 的 n 个有确定次序的函数 $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$，它们都定义在同一个区间 $[a, b]$ 上。一般说来，这些函数都是复函数。我们把这 n 个函数称为以 $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 为分量的**向量**，记为 $\varphi(x)$，即

$$\varphi(x)=(\varphi_1, \cdots, \varphi_n).$$

向量 $\varphi(x)$ 是变量 x 的函数。为了与向量函数区别起见，有时把普通函数（例如 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$ 等等）称为**数量函数**。

所谓两个向量相等，是指这两个向量的对应分量都分别相等。两个向量 $\varphi(x)=(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ 同 $\psi(x)=(\psi_1, \cdots, \psi_n)$ 的乘积 $\varphi\psi$ 是指以下式确定的数量函数：

$$\varphi\psi=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j\psi_j.$$

显然，$\varphi\psi=\psi\varphi$。

设 $$K=(K_{jk})=\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{pmatrix}$$

是以 $K_{jk}(j, k=1, \cdots, n)$为元素的矩阵，其阶为 n. 假设元素 K_{jk} 皆为两个变量 x, s 的数量函数，即 $K_{jk}=K_{jk}(x, s)$. 一般来说，它们也都是复值函数. 与此相应，有时也可以写为 $K=K(x, s)$. 两个 n 阶矩阵 $A=(A_{jk})$ $(j, k=1, \cdots, n)$ 与 $B=(B_{lm})$ $(l, m=1, \cdots, n)$的乘积是指以 $C_{jk}=\sum_{l=1}^{n}A_{jl}B_{lk}$ 为元素的 n 阶矩阵 $C=(C_{jk})$ $(j, k=1, \cdots, n)$，即 C_{jk} 是矩阵 A 的第 j 行与矩阵 B 的第 k 列的对应元素的乘积的和. 记为 $C=AB$.

复值向量与矩阵的共轭，是指分别由原向量的所有分量与原矩阵的所有元素的复共轭值所组成的向量与矩阵. 即若设原向量与原矩阵为

$$\varphi=(\varphi_1, \cdots, \varphi_n), K=\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{pmatrix},$$

则与之共轭的向量与矩阵即为

$$\overline{\varphi}=(\overline{\varphi}_1, \cdots, \overline{\varphi}_n), \overline{K}=\begin{pmatrix} \overline{K}_{11} & \overline{K}_{12} & \cdots & \overline{K}_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{K}_{n1} & \overline{K}_{n2} & \cdots & \overline{K}_{nn} \end{pmatrix}.$$

把矩阵 K 的转置矩阵记为 K^T，则

$$K^T=(K'_{jk}), \quad K'_{jk}=K_{kj}.$$

即 $$K=\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{pmatrix}, \quad K^T=\begin{pmatrix} K_{11} & K_{21} & \cdots & K_{n1} \\ K_{12} & K_{22} & \cdots & K_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{1n} & K_{2n} & \cdots & K_{nn} \end{pmatrix}.$$

具有系数矩阵 A 的线性变换

$$\psi_j=\sum_{k=1}^{n}A_{jk}\varphi_k \quad (j=1, \cdots, n)$$

把向量 $\varphi=(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$变成向量 $\psi=(\psi_1, \cdots, \psi_n)$，这个变换可简单地记为

$$\psi=A\varphi.$$

如果同时又有 $\varphi=B\omega$，这里 B 是某个矩阵，ω 是一个向量，将此式代入上一式中，得

$$\psi=AB\omega=C\omega.$$

设 φ 和 ψ 是两个向量，A 是某个矩阵，用 $\psi A\varphi$ 表示向量 ψ 与向量 $A\varphi$ 的乘积. 经直接验证，可知道

$$\psi A\varphi=\varphi A^T\psi, \tag{*}$$

其中 A^T 是 A 的转置矩阵.

ν 个向量

$$\varphi^{(1)}=(\varphi_1^{(1)}, \cdots, \varphi_n^{(1)}),\ \varphi^{(2)}=(\varphi_1^{(2)}, \cdots, \varphi_n^{(2)}), \cdots,$$
$$\varphi^{(\nu)}=(\varphi_1^{(\nu)}, \cdots, \varphi_n^{(\nu)})$$

的线性组合是指向量

$$\psi=\sum_{k=1}^{\nu} C_k\varphi^{(k)},$$

其中 $C_k(k=1, \cdots, \nu)$ 皆为常数，一般来说，它们都是复数. 这个向量是以

$$\psi_j=\sum_{k=1}^{\nu} C_k\varphi_j^{(k)} \quad (j=1, \cdots, n)$$

作为分量的向量. 如果存在不全为零的常数 $C_k(k=1, \cdots, \nu)$，使对于所考虑的向量的定义区间内的所有值恒有

$$\sum_{k=1}^{\nu} C_k\varphi^{(k)}=0,$$

或同样地有

$$\sum_{k=1}^{\nu} C_k\varphi_j^{(k)}=0 \quad (j=1, \cdots, n),$$

我们就称所考虑的向量 $\varphi^{(1)}, \cdots, \varphi^{(\nu)}$ 在其定义区间内是线性相关的. 对相反的情形，就称为向量 $\varphi^{(1)}, \cdots, \varphi^{(\nu)}$ 在其定义区间内是线性无关的.

我们称向量或矩阵是有界的、连续的、可积的，是指它们的所有分量或元素都分别是有界的、连续的、可积的.

设向量 $\varphi(x)=(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ 和 $\psi(x)=(\psi_1, \cdots, \psi_n)$ 都是在区间 $[a, b]$ 上可积的，定义

$$(\varphi, \psi)=\int_a^b \varphi(x)\,\overline{\psi(x)}\,dx.$$

则下式显然成立：

$$(\varphi, \psi)=\overline{(\psi, \varphi)}.$$

§2 Fredholm 积分方程组

在应用上常会遇到如下形式的 Fredholm 积分方程组

$$\varphi_j(x)-\lambda\sum_{l=1}^{n}\int_a^b K_{jl}(x, s)\varphi_l(s)\mathrm{d}s=f_j(x)\ (j=1, \cdots, n), \quad (3.1)$$

其中 $K_{jl}(x, s)$ 和 $f_j(x)$ $(j, l=1, \cdots, n)$ 都是平方绝对可积的已知函数；而 $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 是未知函数．关于积分方程组(3.1)的理论与解法，与一个方程的情形基本上是相似的．

我们引进记号

$$\varphi(x)=(\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x));$$

$$K(x, s)=\begin{pmatrix} K_{11}(x, s) & K_{12}(x, s) & \cdots & K_{1n}(x, s) \\ K_{21}(x, s) & K_{22}(x, s) & \cdots & K_{2n}(x, s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{n1}(x, s) & K_{n2}(x, s) & \cdots & K_{nn}(x, s) \end{pmatrix};$$

$$f(x)=(f_1(x), \cdots, f_n(x)),$$

则积分方程组(3.1)可以写成向量形式的积分方程：

$$N\varphi\equiv\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\mathrm{d}s=f(x). \quad (3.2)$$

矩阵 $K(x, s)$ 称为向量方程(3.2)或方程组(3.1)的核．这种向量形式的方程和通常一个未知函数的 Fredholm 积分方程在形式上没有什么区别，它们的相似之处不仅是表面的，前面有关一个 Fredholm 积分方程的已知结果，几乎不需作任何改变，就可移植到由方程组(3.1)改写而得到的向量方程(3.2)上．因而，我们把向量方程(3.2)也称为 Fredholm 积分方程；把方程组(3.1)称为 Fredholm 积分方程组．

所谓积分方程组(3.1)(或同样地向量方程(3.2))的一个解，是指 n 个函数 $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$(或同样地是指向量 $\varphi(x)=(\varphi_1,$

$\cdots,\varphi_n)$)，把它们代入方程组(3.1)(或同样地代入向量方程(3.2))，就得到一组恒等式.

方程

$$\boldsymbol{N}^*\psi \equiv \psi(x) - \bar{\lambda}\int_a^b K^*(x, s)\psi(s)\,ds = g(x) \tag{3.3}$$

称为方程(3.2)的共轭向量方程，其中 $\psi(x)$ 是未知向量；$g(x)$ 是已知向量；而

$$K^*(x, s) = \overline{K^T(s, x)}.$$

这里 K^T 表示 K 的转置矩阵. 与向量方程(3.3)相应的数量形式方程组是

$$\psi_j(x) - \bar{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\int_a^b \overline{K_{ij}(s, x)}\psi_i(s)\,ds = g_j(x) \quad (j=1, \cdots, n),$$

它就是积分方程组(3.1)的共轭方程组.

容易验证，对于任意两个可积向量 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$，有以下等式成立：

$$(\boldsymbol{N}\varphi, \psi) = (\varphi, \boldsymbol{N}^*\psi).$$

事实上，按定义，我们有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{N}\varphi, \psi) &= \int_a^b\left[\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds\right]\overline{\psi(x)}\,dx\\ &= \int_a^b \varphi(x)\overline{\psi(x)}\,dx - \lambda\int_a^b\int_a^b \overline{\psi(x)}K(x, s)\varphi(s)\,ds\,dx,\\ (\varphi, \boldsymbol{N}^*\psi) &= \int_a^b \varphi(x)\,\overline{\left[\psi(x) - \bar{\lambda}\int_a^b \overline{K^T(s, x)}\psi(s)\,ds\right]}dx\\ &= \int_a^b \varphi(x)\overline{\psi(x)}\,dx - \lambda\int_a^b\int_a^b \varphi(x)K^T(s, x)\overline{\psi(s)}\,ds\,dx\\ &= \int_a^b \varphi(x)\overline{\psi(x)}\,dx - \lambda\int_a^b\int_a^b \varphi(s)K^T(x, s)\overline{\psi(x)}\,ds\,dx,\end{aligned}$$

但由矩阵与向量的乘积运算性质(*)，就有

$$\overline{\psi(x)}K(x, s)\varphi(s) = \varphi(s)K^T(x, s)\overline{\psi(x)},$$

从而即得等式

$$(\boldsymbol{N}\varphi, \psi) = (\varphi, \boldsymbol{N}^*\psi).$$

对向量方程(3.2)有类似于一个 Fredholm 积分方程的所有结论. 下面对向量方程(3.2)叙述这些结论：

对于每个λ值，齐次向量方程$N\varphi=0$只有有限个线性无关解（向量），与它相共轭的齐次向量方程$N^*\psi=0$也有同样个数的线性无关解（向量）。

如果齐次向量方程$N\varphi=0$没有非零解，则向量方程$N\varphi=f$对于任何右端的向量$f(x)$都是唯一可解的；如果齐次向量方程$N\varphi=0$有ν个非零解（向量），则当且仅当向量$f(x)$适合以下条件

$$(f,\ \psi^{(j)})=0\quad(j=1,\ \cdots,\ \nu)\tag{3.4}$$

时，向量方程$N\varphi=f(x)$才是可解的，这里$\psi^{(1)}(x)$, $\cdots$, $\psi^{(\nu)}(x)$是共轭齐次向量方程$N^*\psi=0$的所有线性无关解。

当$\nu=0$时，即齐次向量方程$N\varphi=0$没有非零解，则存在着向量方程(3.2)或核矩阵$K(x,\ s)$的解核矩阵$\Gamma(x,\ s;\lambda)$，非齐次向量方程$N\varphi=f(x)$的唯一解（向量）可以用它表为

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b\Gamma(x,\ s;\lambda)f(s)\mathrm{d}s.\tag{3.5}$$

特别是，当$|\lambda|$充分小时，解核矩阵$\Gamma(x,\ s;\lambda)$总可用逐次逼近法作出。

把矩阵$\Gamma(x,\ s;\lambda)$转置，交换变量x, s的位置，并且加共轭符号而得到的矩阵$\Gamma^*(x,\ s;\lambda)=\overline{\Gamma^T(s,\ x;\lambda)}$，就是共轭向量方程(3.3)或核矩阵$K^*(x,\ s)$的解核矩阵，因而，向量方程$N^*\psi=g(x)$的解（向量）可由下面的公式

$$\psi(x)=g(x)+\bar{\lambda}\int_a^b\Gamma^*(x,\ s;\lambda)g(s)\mathrm{d}s$$

表示之。

在$\nu>0$的情形，即齐次向量方程$N\varphi=0$和$N^*\psi=0$都有非零解（向量）的情形，存在着广义解核矩阵，我们仍然用$\Gamma(x,\ s;\lambda)$表示之，这时，仅当条件(3.4)满足时，由式(3.5)所确定的向量$\varphi(x)$才是向量方程$N\varphi=f(x)$的一个解。

正如我们在上一章§7中所指出的，这一节的结果可以推广到积分是展布在区域或曲面或曲线上的情形。

上面有关积分方程组的这些类似于一个方程的结果，可以利

用 Fredholm 本人所提出的下述简单方法而得到它们的证明：把积分方程组(3.1)归结为一个普通的数量积分方程，积分路径是由 n 个同样的区间所构成。现在来叙述这一点。为叙述简单起见，我们以 $n=2$ 的情形来说明之：

考虑积分方程组

$$\varphi_1(x)=f_1(x)+\lambda\int_a^b [K_{11}(x,\ s)\varphi_1(x)+K_{12}(x,\ s)\varphi_2(s)]\mathrm{d}s;$$

$$\varphi_2(x)=f_2(x)+\lambda\int_a^b [K_{21}(x,\ s)\varphi_1(s)+K_{22}(x,\ s)\varphi_2(s)]\mathrm{d}s. \tag{3.6}$$

为了把它们归结为一个方程，我们取两份区间 $[a,\ b]$ 作为积分方程的基本区间，这两份区间相互间无联系。我们认为，如果点 M 在第一份区间上，则

$$f(M)=f_1(M);$$

如果点 M 在第二份区间上，则

$$f(M)=f_2(M).$$

类似地，我们定义

$$\varphi(M)=\begin{cases}\varphi_1(M), \text{当点 } M \text{ 在第一份区间上;}\\ \varphi_2(M), \text{当点 } M \text{ 在第二份区间上.}\end{cases}$$

对核 $K(M,\ M_1)$ 用以下方式确定：

$$K(M,\ M_1)=\begin{cases}K_{11}(M,\ M_1), \text{当点 } M\text{、}M_1 \text{ 都在第一份区间上;}\\ K_{12}(M,\ M_1), \text{当点 } M \text{ 在第一份区间上，点 } M_1 \text{ 在第二份区间上;}\\ K_{21}(M,\ M_1), \text{当点 } M \text{ 在第二份区间上，点 } M_1 \text{ 在第一份区间上;}\\ K_{22}(M,\ M_1), \text{当点 } M\text{、}M_1 \text{ 都在第二份区间上.}\end{cases}$$

这时，方程组(3.6)就归结为如下一个积分方程，其积分基本区间 J 是由两份线段 $[a,\ b]$ 组成的，即有

$$\varphi(M)=f(M)+\lambda\int_J K(M,\ M_1)\varphi(M_1)\mathrm{d}\omega_{M1},$$

积分是对两份区间 $[a,\ b]$ 都取的，这里 $\mathrm{d}\omega_{M1}=\mathrm{d}s$.

在上一章已说过，若变点经过的不是一个区间，而是 n 个分离的线段，Fredholm 的诸结果是完全不变的。

§3 Volterra 积分方程组

如果 Fredholm 积分方程组(3.1)中的 $K_{jl}(j, l=1, \cdots, n)$满足下面的条件：

$$K_{jl}(x, s)=0, \text{当 } a\leqslant x\leqslant s\leqslant b \quad (j, l=1, \cdots, n).$$

就有如下形式的 Volterra 型积分方程组：

$$\varphi_j(x)-\lambda\sum_{l=1}^{n}\int_a^x K_{jl}(x, s)\varphi_l(s)\mathrm{d}s=f_j(x) \quad (j=1, \cdots, n),$$

或写成向量形式的方程：

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^x K(x, s)\varphi(s)\mathrm{d}s=f(x).$$

其中向量 $\varphi(x)$与 $f(x)$及矩阵 $K(x, s)$的定义同上节一样。

如同一个方程的情形一样，对上列形式的 Volterra 积分方程组，可以证明，它对于任何 λ 恒存在唯一的解。由于其推导过程没有实质性的困难，这里就不赘述了。

§4 一类 Fredholm 型积分方程

设 Γ 是平面上的一条逐段光滑曲线，$K_1(t, \tau)$、$K_2(t, \tau)$和 $f(t)$都是 Γ 上点 t 与 τ 的已知函数，我们认为它们是有界的和可积的。在实际中(例如参阅[11]、[12]、[5]等)，我们会遇到如下形式的积分方程：

$$\boldsymbol{L}\varphi=\varphi(t)+\int_\Gamma K_1(t, \tau)\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau+\int_\Gamma K_2(t, \tau)\overline{\varphi(\tau)}\,\mathrm{d}\bar{\tau}=f(t), \tag{3.7}$$

其中 $\varphi(t)$是未知函数。这类积分方程的特点是积分号下出现共轭未知函数。这一节里要论证对于这类积分方程，如上章所论述过的 Fredholm 理论，也同样成立。

以 s 表示曲线 Γ 的弧坐标，于是有

$$d\bar{\tau}=\bar{\tau}'^2 d\tau,\ \frac{d\tau}{ds}=\tau',\ |\tau'|=1.$$

这里右上角的撇号（$'$）表示微商．因此，积分方程(3.7)可以写成

$$\boldsymbol{L}\varphi=\varphi(t)+\int_\Gamma K_1(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau+\int_\Gamma K_2(t,\tau)\overline{\varphi(\tau)}\,\bar{\tau}'^2 d\tau=f(t). \tag{3.7}$$

我们称积分方程

$$\boldsymbol{L}^*\psi\equiv\psi(t)+\int_\Gamma\overline{K_1(\tau,t)}\,\psi(\tau)\,d\bar{\tau}+\int_\Gamma K_2(\tau,t)\overline{\psi(\tau)}\,d\tau=g(t) \tag{3.8}$$

为积分方程(3.7)的共轭方程，其中 $\psi(t)$ 是未知函数，$g(t)$ 是已知函数．

对于任意两个可积函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$，记

$$(\varphi,\ \psi)=\int_\Gamma\varphi(t)\,\overline{\psi(t)}\,dt.$$

现在证明，对于两个可积的任意函数 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$，有以下等式成立：

$$\mathrm{Re}(\boldsymbol{L}\varphi,\ \psi)=\mathrm{Re}(\varphi,\ \boldsymbol{L}^*\psi). \tag{3.9}$$

事实上，按定义，对于任意函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$，有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{L}\varphi,\ \psi)&=\int_\Gamma\overline{\psi(t)}\Big[\varphi(t)+\int_\Gamma K_1(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\\&\quad+\int_\Gamma K_2(t,\tau)\overline{\varphi(\tau)}\,d\bar{\tau}\Big]dt\\&=\int_\Gamma\varphi(t)\overline{\psi(t)}\,dt+\int_\Gamma\int_\Gamma\overline{\psi(t)}K_1(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\,dt\\&\quad+\int_\Gamma\int_\Gamma\overline{\psi(t)}K_2(t,\tau)\overline{\varphi(\tau)}\,d\bar{\tau}\,dt,\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}&(\varphi,\ \boldsymbol{L}^*\psi)\\&=\int_\Gamma\varphi(t)\overline{\Big[\psi(t)+\int_\Gamma\overline{K_1(\tau,t)}\psi(\tau)\,d\bar{\tau}+\int_\Gamma K_2(\tau,t)\overline{\psi(\tau)}\,d\tau\Big]}dt\\&=\int_\Gamma\varphi(t)\overline{\psi(t)}\,dt+\int_\Gamma\int_\Gamma\varphi(t)K_1(\tau,t)\,\overline{\psi(\tau)}\,d\tau\,dt\end{aligned}$$

$$+\int_{\Gamma}\int_{\Gamma}\varphi(t)\overline{K_2(\tau,\ t)}\psi(\tau)\mathrm{d}\bar{\tau}\,\mathrm{d}t,$$

上式右端第二个积分等于前式右端第二个积分；上式右端第三个积分交换 t 与 τ 的位置后，恰好是前式右端第三个积分的复共轭值，从而就得出等式(3.9)。

基于等式(3.9)，我们把算子 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{L}^*$ 称为共轭的算子。在 $K_2(t,\ \tau)\equiv 0$ 的情形，也就是在 Fredholm 方程的情形，公式(3.9)等价于已知公式

$$(\boldsymbol{L}\varphi,\ \psi)=(\varphi,\ \boldsymbol{L}^*\psi). \tag{3.10}$$

事实上，这时有 $\boldsymbol{L}i\varphi=i\boldsymbol{L}\varphi$，因而在公式(3.9)中把 $\varphi(t)$ 换成 $i\varphi(t)$，并将所得出的等式与等式(3.9)相加，就可得出公式(3.10)。这个公式在上章§5中已经出现过，形式上是完全一样的。

在方程(3.7)两端取复共轭值，并记 $\varphi^*(t)=\overline{\varphi(t)}$，连同方程(3.7)，则得到积分方程组

$$\begin{aligned}&\varphi(t)+\int_{\Gamma}K_1(t,\ \tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{\Gamma}K_2(t,\ \tau)\bar{\tau}'^2\varphi^*(\tau)\mathrm{d}\tau=f(t),\\&\varphi^*(t)+\int_{\Gamma}\overline{K_2(t,\ \tau)}\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau+\int_{\Gamma}\overline{K_1(t,\ \tau)}\bar{\tau}'^2\varphi^*(\tau)\mathrm{d}\tau=\overline{f(t)}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

如果方程组(3.11)的解 $\varphi(t)$，$\varphi^*(t)$ 互为复共轭值，即

$$\varphi^*(t)=\overline{\varphi(t)}, \tag{3.12}$$

则就等价于一个方程(3.7)。

我们暂时不管条件(3.12)，而把(3.11)作为具有两个未知函数 $\varphi(t)$ 与 $\varphi^*(t)$ 的积分方程组来考虑，它就是第2节所考虑过的 Fredholm 积分方程组，我们把它写成向量积分方程的形式：

$$\boldsymbol{N}\Phi\equiv\Phi(t)+\int_{\Gamma}K(t,\ \tau)\Phi(\tau)\mathrm{d}\tau=F(t), \tag{3.13}$$

其中 $$\Phi(t)=(\varphi(t),\ \varphi^*(t))$$

是未知向量，而

$$K(t, \tau)=\begin{pmatrix} K_1(t, \tau) & K_2(t, \tau)\bar{\tau}'^2 \\ \overline{K_2(t, \tau)} & \overline{K_1(t, \tau)}\bar{\tau}'^2 \end{pmatrix}, \quad F(t)=(f(t), \overline{f(t)})$$

是给定的矩阵和向量，$K(t, \tau)$是向量方程(3.13)的核.

方程(3.13)的共轭齐次向量方程是

$$N^*X \equiv X(t)+\int_\Gamma \overline{K^T(\tau, t)}X(\tau)\bar{\tau}'^2 d\tau=0, \qquad (3.14)$$

其中 $X(t)$是未知向量，而

$$\overline{K^T(\tau, t)}=\begin{pmatrix} \overline{K_1(\tau, t)} & K_2(\tau, t) \\ \overline{K_2(\tau, t)}t'^2 & K_1(\tau, t)t'^2 \end{pmatrix}.$$

对于任意两个可积向量 $\Phi(t)$和 $X(t)$，我们定义

$$(\Phi, X)=\int_\Gamma \Phi(t)\overline{X(t)}\,dt.$$

则如同在§2中所述的，易于直接验证，对于任意两个可积向量 $\Phi(t)$和 $X(t)$，有以下等式成立：

$$(N\Phi, X)=(\Phi, N^*X).$$

我们记 $X(t)=(\psi(t), t'^2\psi^*(t))$, $\Psi(t)=(\psi(t), \psi^*(t))$.
于是向量方程(3.14)可以改写为

$$\Psi(t)+\int_\Gamma K_0^T(\tau, t)\Psi(\tau)d\tau=0, \qquad (3.15)$$

其中
$$K_0^T(\tau, t)=\begin{pmatrix} \overline{K_1(\tau, t)}\bar{\tau}'^2 & K_2(\tau, t) \\ \overline{K_2(\tau, t)}\bar{\tau}'^2 & K_1(\tau, t) \end{pmatrix}.$$

如同向量方程(3.13)是积分方程(3.7)的相应方程组一样，向量方程(3.15)恰好是齐次积分方程 $L^*\psi=0$ 的相应方程组.

由积分方程(3.7)的解，就可得到积分方程组(3.11)或向量积分方程(3.13)的解，反之也然.

事实上，前者是显然的，即若 $\varphi(t)$是方程(3.7)的解，则向量 $\Phi(t)=(\varphi(t), \overline{\varphi(t)})$就是向量方程(3.13)的解. 反之，如果向量 $\Phi(t)=(\varphi(t), \varphi^*(t))$是方程(3.13)的解，则通过对方程(3.13)取复共轭值的方法，可以直接看出向量 $\widetilde{\Phi}(t)=(\overline{\varphi^*(t)}, \overline{\varphi(t)})$也是方程(3.13)的解，因而向量

$$\Omega(t)=\frac{1}{2}[\Phi(t)+\widetilde{\Phi}(t)]=(\omega(t), \overline{\omega(t)}),$$

$$\omega(t)=\frac{1}{2}[\varphi(t)+\overline{\varphi^*(t)}]$$

也满足方程(3.13)，但向量 $\Omega(t)$ 的两个分量互为复共轭值，所以由(3.12)知道，函数 $\omega(t)$ 就是方程(3.7)的解.

现在考察方程(3.7)的齐次方程

$$\boldsymbol{L}\varphi=0 \tag{3.16}$$

和相应的齐次向量方程

$$\Phi(t)+\int_{L}K(t, \tau)\Phi(\tau)d\tau=0. \tag{3.17}$$

由于方程(3.16)是线性的，因而若函数 $\varphi(t)$ 是这一方程的解，则 $C\varphi(t)$ (C 是任意实常数)也是它的解，当 C 为复数时，一般来讲，这并不正确. 因而在这里以及下面，我们对方程(3.16)的所谓解的线性组合及解的线性无关性等总是指在实数域上的组合意义下考虑的，也就是说，是狭义的. 对于向量方程(3.17)的解的线性组合及解的线性无关性等仍按通常意义，即在复数域上考虑.

下面证明，方程(3.16)(在狭义下)的线性无关解的个数 ν 等于向量方程(3.17)(在通常意义下)的线性无关解的个数 μ.

设方程(3.16)的 ν 个(在狭义下)线性无关解为 $\varphi^{(j)}(t)$ ($j=1, \cdots, \nu$)，则方程(3.17)有解 $\Phi^{(j)}(t)=(\varphi^{(j)}(t), \overline{\varphi^{(j)}(t)})$ ($j=1, \cdots, \nu$). 这些解必是(在通常意义下)线性无关的. 事实上，设

$$\sum_{j=1}^{\nu}C_j\Phi^{(j)}(t)=0,$$

式中 C_j ($j=1, \cdots, \nu$)都是复数，即

$$\sum_{j=1}^{\nu}C_j\varphi^{(j)}(t)=0, \ \sum_{j=1}^{\nu}C_j\overline{\varphi^{(j)}(t)}=0,$$

则由于 $\varphi^{(j)}(t)$ ($j=1, \cdots, \nu$)(在狭义下)的线性无关性，可以得出

$$C_j+\overline{C_j}=0, \quad C_j-\overline{C_j}=0 \quad (j=1, \cdots, \nu),$$

从而所有 $C_1, \cdots, C_\nu$ 皆等于零. 这样就得到了

$$\nu\leqslant\mu.$$

反过来，设向量

$$\Phi^{(j)}(t)=(\varphi^{(j)}(t),\ \varphi^{*(j)}(t))\quad (j=1,\ \cdots,\ \mu)$$

是方程(3.17)(在通常意义下)的线性无关解，则一定可以利用这些向量解作出方程(3.16)的同样多个数(在狭义下)的线性无关解. 下面来证明:由前所述,向量

$$\tilde{\Phi}^{(j)}(t)=(\overline{\varphi^{*(j)}(t)},\ \overline{\varphi^{(j)}(t)})\quad (j=1,\ \cdots,\ \mu)$$

也是方程(3.17)的解，因而，它们必是$\Phi^{(1)}(t),\ \cdots,\ \Phi^{(\mu)}(t)$的线性组合,即

$$\tilde{\Phi}^{(j)}(t)=\sum_{l=1}^{\mu} C_{jl}\Phi^{(l)}(t)\quad (j=1,\ \cdots,\ \mu),\tag{3.18}$$

这里C_{jl} $(j,\ l=1,\ \cdots,\ \mu)$都是常数.

显然,对于任意常数$\alpha\neq 0$,向量

$$\Omega^{(j)}(t)=\alpha\tilde{\Phi}^{(j)}(t)+\bar{\alpha}\Phi^{(j)}(t)\quad (j=1,\ \cdots,\ \mu)\tag{3.19}$$

也都是方程(3.17)的解. 其第一个分量是

$$\omega^{(j)}(t)=\alpha\overline{\varphi^{*(j)}(t)}+\bar{\alpha}\varphi^{(j)}(t);$$

而第二个分量

$$\alpha\overline{\varphi^{(j)}(t)}+\bar{\alpha}\varphi^{*(j)}(t)$$

正好是第一个分量$\omega^{(j)}(t)$的复共轭值$\overline{\omega^{(j)}(t)}$. 因此，函数$\omega^{(j)}(t)$ $(j=1,\ \cdots,\ \mu)$就都是方程(3.16)的解. 现在来说明，总能选取常数α,使得函数$\omega^{(1)}(t),\ \cdots,\ \omega^{(\mu)}(t)$是(在狭义下)线性无关的. 事实上,假若不然，即设函数$\omega^{(j)}(t)$ $(j=1,\ \cdots,\ \mu)$在实数域上线性相关，则向量$\Omega^{(j)}(t)$ $(j=1,\ \cdots,\ \mu)$也线性相关(具有同样系数)，因此，联系向量$\Omega^{(j)}(t)$和$\Phi^{(j)}(t)$的线性变换的行列式应该等于零. 但是,由式(3.18)和(3.19)可知道,这个行列式等于

$$\begin{vmatrix} \alpha C_{11}+\bar{\alpha} & \alpha C_{12} & \cdots & \alpha C_{1\mu} \\ \alpha C_{21} & \alpha C_{22}+\bar{\alpha} & \cdots & \alpha C_{2\mu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha C_{\mu 1} & \alpha C_{\mu 2} & \cdots & \alpha C_{\mu\mu}+\bar{\alpha} \end{vmatrix}$$

$$=\alpha^{\mu}\begin{vmatrix} C_{11}+\beta & C_{12} & \cdots & C_{1\mu} \\ C_{21} & C_{22}+\beta & \cdots & C_{2\mu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{\mu 1} & C_{\mu 2} & \cdots & C_{\mu\mu}+\beta \end{vmatrix},$$

其中 $\beta=\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}$. 但是，我们总能这样选定常数 α，使得这个行列式不等于零．这就导致矛盾．所以，对于这里所选定的常数值 α，函数 $\omega^{(j)}(t)$ $(j=1, \cdots, \mu)$ 是（在狭义下）线性无关的．也就是说，有 $\mu\leqslant\nu$.

这样一来，就得到了 $\nu=\mu$. 结论得证．

在上述证明过程中，我们看到了，在求得 Fredholm 积分方程 (3.17)（在通常意义下）的线性无关的全部解 $(\varphi^{(j)}(t), \varphi^{*(j)}(t))$ $(j=1,\cdots,\nu)$ 以后，立即可作出同一个向量方程的所有形如 $(\varphi^{(j)}(t), \overline{\varphi^{(j)}(t)})$ $(j=1, \cdots, \nu)$ 的线性无关解，因而也就求得了齐次积分方程(3.16)（在狭义下）的全部线性无关解 $\varphi^{(j)}(t)$ $(j=1, \cdots, \nu)$. 同样，只要解出了 Fredholm 积分方程 (3.13) 或同样的方程组 (3.11)，就可解出积分方程(3.7)了．反之也然．

类似于上章所述通常的 Fredholm 理论，对于方程(3.7)，有下面的三条结论：

命题 I. 齐次积分方程 $L\varphi=0$（在狭义下）的线性无关解的个数是有限的，而且这个数等于其共轭齐次方程 $L^*\psi=0$（在同样意义下）的线性无关解的个数．在此用 ν 表示这个数．

命题 II. 如果齐次积分方程 $L\varphi=0$ 没有异于零的解，因之其共轭齐次方程 $L^*\psi=0$ 只有零解，则非齐次积分方程 $L\varphi=f(x)$ 对于任意的右端函数 $f(x)$ 总是唯一可解的．

命题 III. 如果齐次积分方程 $L\varphi=0$ 有异于零的解，因而其共轭齐次方程 $L^*\psi=0$ 也有非零解，则非齐次积分方程 $L\varphi=f(x)$ 当且仅当右端函数 $f(t)$ 满足条件

$$\mathrm{Re}(f, \psi^{(j)})=0 \quad (j=1, \cdots, \nu)$$

时才可解，这里 $\psi^{(1)}(t), \cdots, \psi^{(\nu)}(t)$ 是共轭齐次方程 $L^*\psi=0$ 的所有（在狭义下）线性无关解．

正因为形如 (3.7) 的积分方程有上面三个命题成立，所以 (3.7) 也往往被称为 Fredholm 型积分方程．

下面证明关于积分方程(3.7)的上述三个命题．

先证明命题 I：把前面的已得的结果应用于共轭齐次方程 $L^*\psi=0$ 和相应的向量方程(3.15)，并注意到由公式

$$X(t)=(\psi(t),\ t'^2\psi^*(t))$$

所确定的这后一个方程的解 $\Psi(t)=(\psi(t),\ \psi^*(t))$ 与向量方程(3.13)的共轭齐次方程(3.14)的解 $X(t)$ 之间的联系，以 $\psi^{(1)}(t)$，…，$\psi^{(\nu)}(t)$ 表示方程 $L^*\psi=0$(在狭义下)的线性无关的所有解，则向量$(\psi^{(j)},\overline{\psi^{(j)}})$ $(j=1,\ \cdots,\ \nu)$ 就是向量方程(3.15)的所有(在通常意义下的)线性无关解，而向量$(\psi^{(j)},\ t'^2\overline{\psi^{(j)}})$ $(j=1,\ \cdots,\ \nu)$ 是向量方程(3.17)的共轭齐次方程(3.14)的所有(在通常意义下)线性无关解．根据 Fredholm 积分方程组的已知性质，一对共轭的向量方程(3.17)和(3.14)有同样个数的线性无关解，因之，相互共轭的一对方程 $L\varphi=0$ 和 $L^*\psi=0$ 也有同样个数(在狭义意义下)的线性无关解．从而命题 I 得证．

证明命题 II：如果齐次积分方程 $L\varphi=0$ 没有非零解，则方程组(3.11)的齐次方程组也没有非零解，于是，方程组(3.11)对于任意函数 $f(t)$ 都是唯一可解的，设$(\varphi(t),\ \varphi^*(t))$是这个方程组的一个解，前面已经说过，向量$(\overline{\varphi^*(t)},\ \overline{\varphi(t)})$也是这个方程组的解，由于解的唯一性，即得出 $\varphi^*(t)=\overline{\varphi(t)}$，因之函数 $\varphi(t)$ 是方程 $L\varphi=f(t)$ 的唯一的解．从而命题 II 得证．

证明命题 III：为使积分方程 $L\varphi=f$ 可解，必须而且只须积分方程组(3.11)或者同样地向量方程(3.13)是可解的．由上节关于 Fredholm 积分方程组的结论——等式(3.4)——可知道，积分方程组(3.11)或者同样地向量方程(3.13)为可解的充分必要条件是满足等式

$$(F(t),\ X^{(j)}(t))=0\quad(j=1,\ \cdots,\ \nu),\tag{3.20}$$

其中向量 $X^{(j)}(t)$ $(j=1,\cdots,\nu)$是向量方程(3.13)的共轭齐次方程(3.14)的所有(在通常意义下的)线性无关解；而向量 $F(t)=(f(t),\ \overline{f(t)})$．

由在命题 I 的证明过程中所述，可以取向量

$$X^{(j)}(t)=(\psi^{(j)}(t),\ t'^2\overline{\psi^{(j)}(t)})\quad(j=1,\ \cdots,\ \nu),$$

其中 $\psi^{(j)}(t)\ (j=1,\ \cdots,\ \nu)$ 是齐次积分方程 $\boldsymbol{L}^*\psi=0$ 的所有(在狭义下)线性无关解. 因为

$$F(t)\overline{X^{(j)}(t)}=f(t)\overline{\psi^{(j)}(t)}+\overline{f(t)}\,\bar{t}'^2\psi^{(j)}(t),$$

因此, 等式(3.20)可以写为

$$\begin{aligned}0=(F(t),\ X^{(j)}(t))&=\int_\Gamma F(t)\,\overline{X^{(j)}(t)}\,dt\\&=\int_\Gamma f(t)\overline{\psi^{(j)}(t)}\,dt+\int_\Gamma\overline{f(t)}\,\psi^{(j)}(t)\,\bar{t}'^2\,dt\\&=\int_\Gamma f(t)\overline{\psi^{(j)}(t)}\,dt+\int_\Gamma\overline{f(t)}\,\psi^{(j)}(t)\,d\bar{t}\\&=2\mathrm{Re}\int_\Gamma f(t)\overline{\psi^{(j)}(t)}\,dt\\&=2\mathrm{Re}\,(f(t),\ \psi^{(j)}(t))\ (j=1,\ \cdots,\ \nu),\end{aligned}$$

即得

$$\mathrm{Re}(f,\ \psi^{(j)})=0\quad(j=1,\ \cdots,\ \nu).$$

命题 III 得证.

如同通常的 Fredholm 积分方程那样, 对于在积分号下出现共轭未知函数的 Fredholm 型积分方程(3.7), 也可以利用解核把这个方程的解表达出来.

从上面的证明中, 我们可看到, 研究 Fredholm 型积分方程(3.7)的基础是建立方程(3.7)的求解问题和 Fredholm 积分方程组(3.11)或者同样地 Fredholm 向量积分方程(3.13)的求解问题之间的完全等价性, 但是在叙述标志 Fredholm 型积分方程(3.7)的基本性质的三个命题时, 并不出现相应的 Fredholm 积分方程组(3.11).

第四章 对称方程

本章主要介绍具有对称核的第二种 Fredholm 积分方程的基本定理，包括特征值存在定理、Hilbert–Schmidt 定理等. 同时应用这些基本定理进行核的展开，求最小特征值，给出对称方程的求解公式.

§1 对称核

定义 如果一个核与它的共轭核相同，则称这样的核为对称核. 对称核的特征就是下面的恒等式成立：

$$K(x, s)=\overline{K(s, x)}. \tag{4.1}$$

若对称核是实的，则有

$$K(x, s)=K(s, x).$$

具有对称核的积分方程，称为对称方程.

对称核具有以下几个简单的性质：

1° 若 $K(x, s)$ 为对称核，则它的一切迭核 $K_m(x, s)$ 也是对称核. 这可用归纳法证明如下：

因为按定义有

$$\begin{aligned} K_2(x, s) &= \int_a^b K(x, t)K(t, s)\,dt \\ &= \int_a^b \overline{K(s, t)}\,\overline{K(t, x)}\,dt \\ &= \overline{K_2(s, x)}. \end{aligned}$$

假设 $K_{n-1}(x, s)=\overline{K_{n-1}(s, x)}$，于是

$$K_n(x, s)=\int_a^b K_{n-1}(x, t)K(t, s)\,dt$$

$$=\int_a^b \overline{K(s,t)}\ \overline{K_{n-1}(t,x)}\,dt$$
$$=\overline{K_n(s,x)}.$$

换言之，有

$$(K^m)^*=(K^*)^m=K^m. \tag{4.2}$$

2° 若 $K(x,s)$ 为对称核，则对一切 φ 与 ψ 恒有

$$(K\varphi,\psi)=(\varphi,K\psi) \tag{4.3}$$

成立. 反之，也然.

事实上，当核 $K(x,s)$ 为对称核时，由

$$(K\varphi,\psi)=(\varphi,K^*\psi),\quad K^*\psi=K\psi,$$

就必有(4.3)式.

反之，对一切平方绝对可积的函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$，若有(4.3)式成立，则同时有

$$(K\varphi,\psi)=(\varphi,K\psi)\quad 及\quad (K\varphi,\psi)=(\varphi,K^*\psi),$$

故有

$$(\varphi,K\psi-K^*\psi)=0.$$

将上式写开，即有

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx\,\overline{\int_a^b [K(x,s)-\overline{K(s,x)}]\psi(s)\,ds}=0.$$

特别，取任意函数

$$\varphi(x)=\int_a^b [K(x,s)-\overline{K(s,x)}]\psi(s)\,ds,$$

就有

$$\int_a^b [K(x,s)-\overline{K(s,x)}]\psi(s)\,ds=0.$$

对任意给定的 x，再取任意函数

$$\psi(s)=\overline{K(x,s)}-K(s,x),$$

就可推出

$$K(x,s)=\overline{K(s,x)}.$$

3° 若 $K(x,s)$ 为对称核，则对任意的函数 $\varphi(x)$，有

$$(K\varphi,\varphi)=\overline{(K\varphi,\varphi)}. \tag{4.4}$$

即 $(K\varphi,\varphi)$ 是实的.

这是因为

$$(K\varphi,\varphi)=(\varphi,K^*\varphi)=(\varphi,K\varphi)=\overline{(K\varphi,\varphi)}.$$

由以上这些对称核的性质可以进一步引导出对称方程的一些重要定理，这些定理在建立对称方程的理论时起着重要的作用．在后面各节里，我们逐步来叙述它们．

例如：核 $x+s$, $\ln|x-s|$, $i(x-s)$, $\cos(x-s)$ 都是对称核；而核 $i(x+s)$, $i\cos(x-s)$ 都是非对称核，这是因为在这些情况有

$$\overline{K(s, x)} = -K(x, s).$$

§2 正交标准系

对平方绝对可积的函数列：

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \cdots,\ \varphi_n(x),\ \cdots, \tag{4.5}$$

如果任意两个函数是正交的，则称它们为*正交函数列*．如果在正交函数列中，任一函数的模都等于1，则称这函数列为*正交标准系*．换言之，若函数列(4.5)是一正交标准系，则有

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \begin{cases} 0, & 当\ j \neq k; \\ 1, & 当\ j = k. \end{cases} \tag{4.6}$$

易知，任一正交函数列都可变作正交标准系，这只须将函数列中的每一个函数都用它自己的模除之．

任给一组线性无关的函数

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \cdots,\ \psi_m(x), \tag{4.7}$$

都可以构造同样个数的正交标准的新函数

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \cdots,\ \varphi_m(x), \tag{4.8}$$

且一切 $\varphi_k(x)$ 可由 $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\cdots$, $\psi_k(x)$ 线性表示；反之，一切 $\psi_k(x)$ 也可由 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\cdots$, $\varphi_k(x)$ 线性表示．显然，函数列(4.8)也是线性无关的．

这个构造方法也称为函数列 $\{\psi_k(x)\}$ 的正交标准化的方法，实现步骤如下：

$$\varphi_1(x) = \frac{\psi_1(x)}{\sqrt{(\psi_1, \psi_1)}},$$

$$\varphi_2(x)=\frac{\psi_2^*(x)}{\sqrt{(\psi_2^*,\ \psi_2^*)}},$$

$$\psi_2^*(x)=\psi_2(x)-(\psi_2,\ \varphi_1)\varphi_1(x),$$

$$\varphi_3(x)=\frac{\psi_3^*(x)}{\sqrt{(\psi_3^*,\ \psi_3^*)}},$$

$$\psi_3^*(x)=\psi_3(x)-(\psi_3,\ \varphi_2)\varphi_2(x)-(\psi_3,\ \varphi_1)\varphi_1(x),$$

························

$$\varphi_m(x)=\frac{\psi_m^*(x)}{\sqrt{(\psi_m^*,\ \psi_m^*)}},$$

$$\psi_m^*(x)=\psi_m(x)-\sum_{k=1}^{m-1}(\psi_m,\ \varphi_k)\varphi_k(x).$$

容易验证，由上述方式构造的函数序列$\{\varphi_i(x)\}$能使等式(4.6)成立，即

$$(\varphi_j,\ \varphi_k)=\begin{cases}0, & 当\ j\neq k;\\ 1, & 当\ j=k.\end{cases}$$

事实上，由上述构造方法可知，一切$\psi_k^*(x)\neq 0$，否则，将推出$\psi_1(x)$，…，$\psi_k(x)$是线性相关的，这与假设相矛盾．例如，若$\psi_2^*(x)\equiv 0$，则有

$$\psi_2(x)-(\psi_2,\ \varphi_1)\varphi_1(x)\equiv 0,$$

或

$$\psi_2(x)-(\psi_2,\ \varphi_1)\frac{1}{\sqrt{(\psi_1,\psi_1)}}\psi_1(x)\equiv 0,$$

即$\psi_1(x)$和$\psi_2(x)$线性相关．其它可依次类推．由此可知，上述的构造方法是可行的，且每个$\varphi_i(x)$的模都等于1．

同样，易知$\varphi_2(x)$或$\psi_2^*(x)$同$\varphi_1(x)$正交，即

$$(\psi_2^*(x),\ \varphi_1(x))=(\psi_2,\ \varphi_1)-(\psi_2,\ \varphi_1)(\varphi_1,\ \varphi_1)=0.$$

依次类推，可得任一个$\varphi_j(x)$都同前面的$j-1$个函数$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$，…，$\varphi_{j-1}(x)$成正交，即$(\varphi_k,\ \varphi_j)=0\ \ (j>k)$．$\varphi_m(x)$也同一切$\varphi_j(x)\ \ (j<m)$成正交．从而函数序列$\{\varphi_j(x)\}$构成了正交标准系，即等式(4.6)成立．

从任一正交标准系出发，可以建立与三角级数相类似的Fourier级数的理论．现对此概述如下：

设给定一正交标准系如(4.5)所示，即

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \cdots,\ \varphi_n(x),\ \cdots,$$

对任一函数 $f(x)$，可以提出这样的问题：如何选择系数 $\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_n$，使下面的近似式

$$f(x)\approx\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k(x) \tag{4.9}$$

的平方均值误差

$$\delta_n=\int_a^b\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)\right|^2\mathrm{d}x$$

为最小。

首先，引进记号

$$a_k=(f,\ \varphi_k)=\int_a^b f(x)\overline{\varphi_k(x)}\mathrm{d}x,$$

式中常数 a_k 称为函数 $f(x)$ 关于正交标准系(4.5)的 Fourier 系数。经过简单计算，得

$$\delta_n=\int_a^b|f(x)|^2\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k-a_k|^2-\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2.$$

由此可见，若 $\alpha_k=a_k$，也就是选择系数 α_k 为 $f(x)$ 的 Fourier 系数 a_k 时，则 δ_n 将为最小，其最小值等于

$$\int_a^b|f(x)|^2\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2, \tag{4.10}$$

$\|f\|$ 表示 $f(x)$ 在空间 $L_2[a,\ b]$ 中的模。由于 $\delta_n\geqslant 0$，可知恒有以下不等式：

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\leqslant\|f\|^2.$$

不等式的左边是正项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|^2$ 的部分和，而不等式指出了这级数的一切部分和是有界的，从而这级数是收敛的，且有以下不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2\leqslant\|f\|^2 \tag{4.11}$$

成立。(4.11)称为 Bessel 不等式。

使近似式(4.9)中——在其中取 $\alpha_k=a_k$ ——的 n 增至无穷大，

就得到函数$f(x)$的 Fourier 级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x). \tag{4.12}$$

如果级数 (4.12) 是收敛的，且其和等于$f(x)$，则称$f(x)$可展成为关于$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$，$\cdots$，$\varphi_n(x)$，$\cdots$的 Fourier 级数。如果$f(x)$可展成为一致收敛的 Fourier 级数(4.12)，则有下列关系式

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2=\|f\|^2 \tag{4.13}$$

成立。(4.13)称为 Parseval 等式。这是因为对任意给定的$\varepsilon>0$，当n充分大时，对一切$x\in[a, b]$均有不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x)-f(x)\right|^2<\varepsilon$$

成立。从而有

$$\begin{aligned}\delta_n&=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\\&=\int_a^b\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k(x)\right|^2\mathrm{d}x<\varepsilon(b-a).\end{aligned}$$

令$\varepsilon\to0$，因之$n\to\infty$，即得 Parseval 等式。

Riesz-Fischer 定理 设$\{\varphi_k(x)\}$是正交标准系，$\varphi_k(x)\in L_2[a, b]$，又设$\{h_k\}$是任意给定的数列，且级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}|h_k|^2$收敛，则存在唯一的$f(x)\in L_2[a, b]$，它关于$\varphi_k(x)$的 Fourier 系数为$h_k$，且它的 Fourier 级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}h_k\varphi_k(x)$均值收敛于$f(x)$。

证明 首先作函数序列

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}h_k\varphi_k(x),$$

这时，有$\int_a^b|f_{n+p}(x)-f_n(x)|^2\mathrm{d}x=\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}|h_k|^2\to0$，当$n\to\infty$时。由于平方绝对可积的函数空间$L_2[a, b]$是完备的，故必存在唯一的函数$f(x)$，使得

$$\int_a^b|f_n(x)-f(x)|^2\mathrm{d}x\to0,\quad 当\ n\to\infty\ 时.$$

另外，不妨记 a_k 是 $f(x)$ 关于 $\varphi_k(x)$ 的 Fourier 系数，则下面的平方均值误差

$$\left\| f(x)-\sum_{k=1}^{n} h_k\varphi_k(x)\right\|^2$$

$$=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2+\sum_{k=1}^{n}|a_k-h_k|^2\to 0,\quad \text{当 } n\to\infty \text{ 时},$$

而对于 $f(x)$，有 Bessel 不等式

$$\|f\|^2-\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2\geqslant 0$$

成立．所以，对一切 k，恒有 $a_k=h_k$．即证得 $f(x)$ 的 Fourier 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} h_k\varphi_k(x)$ 均值收敛于 $f(x)$．

定义　设给定一个正交系，若存在一个函数，它不恒等于零，且与正交系中的一切函数成正交，则称这个正交系是不完备的，反之，则称为是完备的．

例如，在区间 $(-\pi, \pi)$ 内的下列正交系

$$\cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots$$

是不完备的，因为 $\varphi(x)\equiv 1$ 与这系中的一切函数成正交；而由三角级数的理论可知道，下列的正交系

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots$$

是完备的．

若正交标准系(4.5)是完备的，且 Fourier 级数(4.2)是一致收敛的，则它必收敛于 $f(x)$．对此证明如下：

令
$$\omega(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)-f(x),$$

因级数(4.12)是一致收敛的，故可逐项求积分，于是对一切 $\varphi_k(x)$，有

$$(\omega,\ \varphi_k)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\varphi_n,\ \varphi_k)-(f,\ \varphi_k)=a_k-a_k=0.$$

于是 $\omega(x)$ 与一切函数 $\varphi_k(x)$ 成正交，但按假设，这正交标准系是完备的，故 $\omega(x)\equiv 0$，即有

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) = f(x).$$

有关正交系的几个例子:

(1) 函数系 $\varphi_k(x) = e^{ikx}$, 其中 k 取 0 及一切整数, 则此系在 $(-\pi, \pi)$ 内是一正交系,但它不是标准系,因为

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_k(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x = 2\pi.$$

而下列函数列

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \quad (k = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots)$$

在 $(-\pi, \pi)$ 内是正交标准系.

(2) 函数系 $\cos kx (k=0, 1, \cdots)$ 和 $\sin kx (k=1, 2, \cdots)$ 在区间 $(0, \pi)$ 内构成一个正交系.

而函数序列

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos kx \quad (k=0, 1, 2, \cdots)$$

和

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx \quad (k=1, 2, \cdots)$$

在 $(0, \pi)$ 内是正交标准系.

(3) Legendre 多项式

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (x^2-1)^n \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

在区间 $(-1, 1)$ 内构成正交系,它们满足下列关系:

$$\int_{-1}^{1} P_i(x) P_k(x) \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{当 } i \neq k; \\ \dfrac{2}{2k+1}, & \text{当 } i = k. \end{cases}$$

以上正交系都是完备的.

下面证明这样的命题:

正交标准系是完备的充分必要条件是: 对任何平方绝对可积的函数 $f(x)$, 它的 Bessel 不等式成为 Parseval 等式.

先证明充分性: 设对任意函数 $f(x) \in L_2[a, b]$, Parseval 等

式

$$\|f\|^2=\int_a^b|f(x)|^2\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2$$

成立．其中 a_k 是 $f(x)$ 关于正交标准系(4.5)的 Fourier 级数．

若 $f(x)$ 同一切 $\varphi_k(x)$ 成正交，则有

$$(f,\ \varphi_k)=a_k=0,$$

由此推知 $$\|f\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2=0,$$

即有 $$f(x)\equiv 0.$$

换言之，不存在不恒等于零的函数 $f(x)$ 同函数系(4.5)中的一切函数成正交，故正交标准系(4.5)是完备的．

证必要性：设函数系(4.5)是完备的． 对任一函数 $f(x)\in L_2[a,\ b]$，作它的 Fourier 级数的部分和

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k(x),$$

由级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|^2$ 的收敛性可知，$f_n(x)$ 按 $L_2[a,\ b]$ 的范数收敛．而函数空间 $L_2[a,\ b]$ 是完备的，故存在 $\varphi(x)$，使得 $f_n(x)$ 平方均值收敛于 $\varphi(x)$，即有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\|f_n-\varphi\|^2&=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k(x)-\varphi(x)\right|^2\mathrm{d}x\\&=\int_a^b|\varphi^2(x)|\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^2+\sum_{k=1}^{\infty}|a_k-b_k|^2=0,\end{aligned}$$

这里 b_k 是 $\varphi(x)$ 关于 $\{\varphi_k(x)\}$ 的 Fourier 系数．

联系 Bessel 不等式

$$\int_a^b|\varphi(x)|^2\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^2\geqslant 0,$$

可得 $$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k-b_k|^2=0,$$

即有 $a_k=b_k(k=1,\ 2,\ \cdots)$．因之

$$\int_a^b|\varphi(x)|^2\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2. \tag{4.14}$$

此外，作函数 $F(x)=f(x)-\varphi(x)$，因为

$$(F,\ \varphi_k)=(f,\ \varphi_k)-(\varphi,\ \varphi_k)=a_k-b_k=0,$$

而函数系$\{\varphi_k(x)\}$是完备的，故$F(x)\equiv 0$，即有

$$f(x)\equiv\varphi(x).$$

联系上面的等式(4.14)又得

$$\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2,$$

这就是说，对任一函数$f(x)$，Parsoval 等式恒成立，命题证毕。

§3 关于对称方程的基本定理

定理4.1（特征值存在定理） 如果积分方程的核是对称的，且不恒等于零，则至少有一个特征值.

证明 设$K(x,\ s)$是不恒等于零的对称核，先用逐次迫近法求出下列方程

$$\varphi(x,\ \lambda)=\lambda\int_a^b K(x,\ s)\varphi(s,\ \lambda)\,\mathrm{d}s+f(x) \qquad (4.15)$$

的形式解，记为

$$\varphi(x,\ \lambda)=f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\int_a^b K_n(x,\ s)f(s)\mathrm{d}s, \qquad (4.16)$$

其中$K_n(x,\ s)$是$K(x,\ s)$的n次迭核.

现在证明，如果取$f(x)$是不与$K(x,\ s)$正交的函数，则由级数(4.16)给出的解$\varphi(x,\ \lambda)$就不是λ的整函数，也就是说，级数(4.16)不对所有的λ值收敛，从而也就证明了对称核$K(x,\ s)$至少有一个特征值.

若不然，设$f(x)$是平方绝对可积的函数，级数(4.16)表示为λ的整函数，将(4.16)的所有项乘以$\overline{f(x)}$且对x积分，则得到级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}g_n\lambda^n, \qquad (4.17)$$

其中

$$g_n=\int_a^b\int_a^b K_n(x,\ s)\overline{f(x)}f(s)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s.$$

级数(4.17)自然也是λ的整函数．由于核$K(x, s)$是对称的，故g_{2n}可写成

$$g_{2n}=\int_a^b\int_a^b K_{2n}(x, s)\overline{f(x)}f(s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s$$

$$=\int_a^b\int_a^b\int_a^b K_n(x, t)\,K_n(t, s)\overline{f(x)}f(s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^b\left|\int_a^b K_n(x, t)\overline{f(x)}\,\mathrm{d}x\right|^2\mathrm{d}t. \tag{4.18}$$

由此可见$g_{2n}\geqslant 0$．另外，g_{2n}又可写成

$$g_{2n}=\int_a^b\int_a^b\int_a^b K_{n+1}(x, t)K_{n-1}(t, s)\overline{f(x)}f(s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^b\left[\int_a^b K_{n+1}(x, t)\overline{f(x)}\,\mathrm{d}x\right]\cdot\left[\int_a^b K_{n-1}(t, s)f(s)\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^b\left[\int_a^b K_{n+1}(x, t)\overline{f(x)}\,\mathrm{d}x\right]\cdot\left[\int_a^b\overline{K_{n-1}(s, t)}f(s)\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t, \tag{4.19}$$

对上式应用 Bessel 不等式，可得

$$g_{2n}^2\leqslant\int_a^b\left|\int_a^b K_{n+1}(x,t)\overline{f(x)}\,\mathrm{d}x\right|^2\mathrm{d}t\int_a^b\left|\int_a^b K_{n-1}(s, t)\overline{f(s)}\,\mathrm{d}s\right|^2\mathrm{d}t, \tag{4.20}$$

即有

$$g_{2n}^2\leqslant g_{2n+2}\cdot g_{2n-2}. \tag{4.21}$$

又设$f(x)$是不与$K(x, s)$正交的函数，即

$$\int_a^b K(x, s)\overline{f(x)}\,\mathrm{d}x\neq 0. \tag{4.22}$$

于是由(4.18)可知$g_2>0$，且$g_4=0$的充要条件是$f(x)$与$K_2(x,s)$成正交，因此联系不等式(4.22)可知$g_4>0$，进而由递推公式(4.21)，又得g_6, g_8, $\cdots$, g_{2n}, $\cdots$都大于零．这样一来，就得不等式

$$\frac{g_{2n}}{g_{2n-2}}\leqslant\frac{g_{2n+2}}{g_{2n}}, \tag{4.23}$$

也即g_{2n}/g_{2n-2}是单调增加的数列．因此当取级数(4.17)中的偶数项作成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_{2n}\lambda^{2n}. \tag{4.24}$$

则由于它的收敛半径为

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} g_{2n}/g_{2n-2}}<\infty, \tag{4.25}$$

故级数(4.24)不对一切 λ 收敛.

从而再应用幂级数在收敛圆内必绝对且一致收敛的性质，可进一步推得级数(4.16)也不对一切 λ 收敛. 换言之，当取 $f(x)$ 不与对称核 $K(x, s)$ 成正交时，由(4.15)给出的 $\varphi(x, \lambda)$ 不表示为 λ 的整函数，这一矛盾即说明了对称核至少有一个特征值. 定理证毕.

对于非对称核这个定理是不成立的.

例 1 取核 $K(x, s)=(4x-3)s^2$，考虑方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1 (4x-3)s^2\varphi(s)\,\mathrm{d}s \quad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

显然，该方程的解只能取以下形式：

$$\varphi(x)=k(4x-3) \quad (k\text{为常数}),$$

将它代入方程中，得

$$k(4x-3)=\lambda k(4x-3)\int_0^1 (4s^3-3s^2)\,\mathrm{d}s=0,$$

于是 $k=0$，即 $\varphi(x)=0$. 因此对一切 $\lambda\neq 0$，方程仅有零解，换言之，它没有特征值.

例 2 取核 $K(x, s)=\sin\pi x\cos\pi s$，$x$、$s\in[0, 1]$，显见它也不是对称核. 同样能够证明它没有特征值.

事实上，由

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1 \sin\pi x\cos\pi s\,\varphi(s)\,\mathrm{d}s$$

$$=\lambda\sin\pi x\int_0^1 \varphi(s)\cos\pi s\,\mathrm{d}s=c\sin\pi x,$$

可得 $$c\sin\pi x=\lambda c\sin\pi x\int_0^1 \sin\pi s\cdot\cos\pi s\,\mathrm{d}s=0,$$

从而 $c=0$，$\varphi(x)\equiv 0$，也就是说对任意参数λ，方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1 \sin\pi x\cdot\cos\pi s\,\varphi(s)\,\mathrm{d}s$$

只有零解，即它没有特征值.

Volterra 积分方程均没有特征值，它们的核是非对称的.

定理 4.2 对称核的一切特征值都是实数.

证明 设 λ_0 及 $\varphi_0(x)$ 是核 $K(x, s)$ 的特征值及与 λ_0 对应的特征函数. 由定义知，它们适合等式

$$\varphi_0(x) - \lambda_0\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s = 0,$$

即
$$\varphi_0(x) - \lambda_0 K\varphi_0 = 0.$$

将此式乘以 $\overline{\varphi_0(x)}$，且从 a 到 b 取积分，得

$$\|\varphi_0(x)\|^2 - \lambda_0(K\varphi_0, \varphi_0) = 0,$$

从而得到
$$\lambda_0 = \frac{\|\varphi_0(x)\|^2}{(K\varphi_0, \varphi_0)}.$$

上式中的分子是一个正数，分母根据 §1 中的对称核的简单性质 2° 知是实的，所以 λ_0 是实数.

定理 4.3 与对称核的不同特征值对应的特征函数成正交.

证明 设 λ_1 和 λ_2 是对称核 $K(x, s)$ 的两个不同特征值，且 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 是分别对应于 λ_1 和 λ_2 的特征函数，因此有

$$\varphi_1(x) - \lambda_1 K\varphi_1 = 0; \quad \varphi_2(x) - \lambda_2 K\varphi_2 = 0.$$

用 $\lambda_2\overline{\varphi_2(x)}$ 和 $\lambda_1\overline{\varphi_1(x)}$ 分别乘上面的第一式及第二式，且从 a 至 b 积分，由定理 4.2 知 λ_1 和 λ_2 都是实的，故可置它们于数量积记号之外，即有

$$\lambda_2(\varphi_1, \varphi_2) - \lambda_1\lambda_2(K\varphi_1, \varphi_2) = 0, \tag{4.26}$$

$$\lambda_1(\varphi_2, \varphi_1) - \lambda_1\lambda_2(K\varphi_2, \varphi_1) = 0. \tag{4.27}$$

对后一式(4.27)，将数量积的因子互换，再取共轭，即得

$$\lambda_1(\varphi_1, \varphi_2) - \lambda_1\lambda_2(\varphi_1, K\varphi_2) = 0.$$

它又等于

$$\lambda_1(\varphi_1, \varphi_2) - \lambda_1\lambda_2(K\varphi_1, \varphi_2) = 0. \tag{4.28}$$

从(4.26)减去(4.28)，得

$$(\lambda_2 - \lambda_1)(\varphi_1, \varphi_2) = 0.$$

但 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，因此必须$(\varphi_1, \varphi_2) = 0$. 从而定理得证.

定理 4.4 对称核的一切特征函数组成的序列恒可以变为一个正交标准系.

证明 由定理 4.3 知, 与对称核的不同特征值对应的特征函数成正交. 而对应于同一个特征值的线性无关的特征函数的个数是有限的, 设为 n 个, 这时可应用前面所述的正交化方法, 由这已知的 n 个线性无关的特征函数可构造出 n 个线性组合, 而由这 n 个线性组合得到的函数都是正交标准化的特征函数. 这样一来, 我们可以认为对称核的一切特征函数都成正交, 且它们的模都等于 1, 于是它们就构成一个正交标准系.

为了研究问题方便起见, 今后我们认定每一个特征值仅有一个特征函数与它对应, 若某一个特征值对应于 n 个线性无关的特征函数, 则可将这些特征值重写 n 次, 这样可按特征值的绝对值的大小而依次排列

$$|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \cdots \leqslant |\lambda_n| \leqslant \cdots, \tag{4.29}$$

相应的, 与其对应的正交标准特征函数序列为

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \cdots,\varphi_n(x),\ \cdots. \tag{4.30}$$

并可认为后者构成一个正交标准系.

序列(4.30)称为核 $K(x, s)$ 或与它对应的积分方程的特征函数系.

定理 4.5 对称核的最小特征值(按绝对值意义)的绝对值的倒数等于 $|(K\varphi, \varphi)|$ 在条件 $(\varphi, \varphi)=1$ 下的极大值. 且当 $\varphi_1(x)$ 是与核的最小特征值 λ_1 对应的特征函数时, 则有

$$\frac{1}{|\lambda_1|}=|(K\varphi_1, \varphi_1)|=\max_{\|\varphi\|=1}|(K\varphi, \varphi)|.$$

为证明这定理, 必须再次提及一些有关均值收敛的概念和预备定理.

设 $\varphi_n(x)$ 和 $\varphi(x)$ 都是平方绝对可积的函数, 若

$$\|\varphi_n-\varphi\|=\left[\int_a^b |\varphi_n(x)-\varphi(x)|^2 \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} \to 0 \quad (n\to\infty),$$

则称 $\varphi_n(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上均值收敛于 $\varphi(x)$.

显然，同一收敛的函数列只能收敛于一个函数.

此外，关于均值收敛，有这样一个定理：一个平方绝对可积的函数列 $\varphi_n(x)$ 均值收敛于一个平方绝对可积函数 $\varphi(x)$ 的充分必要条件是

$$\lim_{m,n\to\infty}\|\varphi_n-\varphi_m\|=0.$$

设级数

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{4.31}$$

的部分和组成的函数列在闭区间 $[a, b]$ 内均值收敛于一个函数 $v(x)$，则称这个级数在同一个区间 $[a, b]$ 内是均值收敛的，且其和等于 $v(x)$.

定理 4.6 设级数(4.31)是均值收敛的，且设 $f(x)$ 是任意一个平方绝对可积的函数，则将级数 (4.31) 的诸项乘以 $f(x)$ 之后，可逐项求积分. 即以下等式成立：

$$\int_a^b v(x)f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.32}$$

证明 以 $v_n(x)$ 表示级数(4.31)的前 n 项部分和. 于是当 $n\to\infty$ 时，有 $\|v-v_n\|\to 0$. 由此，当 $n\to\infty$ 时，有

$$|(v-v_n,\ \bar{f})|\leqslant\|v-v_n\|\cdot\|\bar{f}\|\to 0,$$

从而又有

$$(v,\ \bar{f})=\lim_{n\to\infty}(v_n,\ \bar{f})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(u_k,\ \bar{f})=\sum_{k=1}^{\infty}(u_k,\ \bar{f}). \tag{4.33}$$

由数量积的定义，得

$$(v,\ \bar{f})=\int_a^b v(x)f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$(u_k,\ \bar{f})=\int_a^b u_k(x)f(x)\,dx,$$

故等式(4.33)同于等式(4.32)，定理证毕.

定理 4.7 设核 $K(x, s)$ 满足以下条件：

$$\int_a^b\int_a^b|K(x,\ s)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s=B^2<\infty,$$

则 Fredholm 积分算子

$$K\varphi=\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s$$

可将任一有界函数集变为致密集.

换言之, 设 Φ 是任意有界函数集(若 $\varphi\in\Phi$, 则 $\|\varphi\|<M$, M 为正常数), 则从 Φ 中可取出这样的一个函数列 $\{\varphi_n(x)\}$, 使当 n、$m\to\infty$ 时, 有

$$\|K\varphi_n-K\varphi_m\|=\|K(\varphi_n-\varphi_m)\|\to 0.$$

证明 首先写出 $K(x, s)$ 关于三角函数系的 Fourier 级数

$$K(x, s)\sim\sum_{i,k=0}^{\infty}A_{ik}\cos\frac{i\pi(x-a)}{b-a}\cos\frac{k\pi(s-a)}{b-a},$$

且记

$$\sum_{i,k=0}^{j}A_{ik}\cos\frac{i\pi(x-a)}{b-a}\cos\frac{k\pi(s-a)}{b-a}=P_j(x, s),$$

$$K(x, s)-P_j(x, s)=K_j'(x, s).$$

由 Parseval 等式, 有

$$\begin{aligned}&\lim_{j\to\infty}\int_a^b\int_a^b|K_j'(x, s)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\&=\int_a^b\int_a^b|K(x, s)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\sum_{i,k=0}^{\infty}|A_{ik}|^2=0.\end{aligned}\tag{4.34}$$

其次, 令

$$K\varphi=P_j\varphi+K_j'\varphi,$$

其中 $P_j\varphi$ 及 $K_j'\varphi$ 是 Fredholm 算子, 这两个积分算子的核分别是 $P_j(x,s)$ 及 $K_j'(x,s)$. 设 $\varphi(x)$ 是所给的函数集 Φ 中的一个函数, 它的 Fourier 级数为

$$\varphi(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}a^{(k)}\cos\frac{k\pi(x-a)}{b-a},$$

于是有

$$P_j\varphi=\sum_{i=0}^{j}\cos\frac{i\pi(x-a)}{b-a}\sum_{k=0}^{j}\frac{A_{ik}a^{(k)}(b-a)}{2}.\tag{4.35}$$

因为

$$|a^{(k)}|=\frac{2}{b-a}\left|\int_a^b\varphi(x)\cos\frac{k\pi(x-a)}{b-a}\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \frac{2}{b-a}\left\{\int_a^b \cos^2 \frac{k\pi(x-a)}{b-a}\,\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_a^b |\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{b-a}}\left\{\int_a^b |\varphi(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} < M\sqrt{\frac{2}{b-a}},$$

故一切系数 $a^{(k)}$ 构成一个有界集.

由 Weierstrass 关于有界数集的极限存在定理，可从所设集 Φ 中选择这样的一个序列$\{\varphi_n\}$，使下面的极限

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{(k)} \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ j)$$

存在，其中 $a_n^{(k)}$ 是函数 $\varphi_n(x)$ 的第 k 个 Fourier 系数. 于是由(4.35)式再应用定理 4.6，可知当 $n\to\infty$ 时，$P_j\varphi_n$ 按均值意义收敛于一个极限.

从集 Φ 中选择一个序列$\{\varphi_{1n}\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} P_1\varphi_{1n}$ 按均值收敛意义存在. 再在$\{\varphi_{1n}\}$中选择一个子序列$\{\varphi_{2n}\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} P_2\varphi_{2n}$ 按均值收敛意义存在. 依次类推，照此选择方法继续下去，得到一个无限序列集

$$\begin{array}{l}
\varphi_{11},\ \varphi_{12},\ \cdots,\ \varphi_{1n},\ \cdots,\\
\varphi_{21},\ \varphi_{22},\ \cdots,\ \varphi_{2n},\ \cdots,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\varphi_{n1},\ \varphi_{n2},\ \cdots,\ \varphi_{nn},\ \cdots.
\end{array} \tag{4.36}$$

显见，每后一个序列都含在前面的序列之内，且当 $j\leqslant k$ 时，$P_j\varphi_{kn}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$是收敛的.

考虑对角线序列 $\varphi_{11},\ \varphi_{22},\ \cdots,\varphi_{nn},\ \cdots,$

除非这个序列的元素是有限的，它的一切元素皆属于(4.36)中的某一个序列. 由此可知，对于任意的正整数 j，极限

$$\lim_{n\to\infty} P_j\varphi_{nn} \tag{4.37}$$

按均值收敛意义存在.

现在证明序列$\{K\varphi_{nn}\}$是收敛的：

应用三角不等式估计，得

$$\|K\varphi_{nn}-K\varphi_{mm}\|\leqslant\|K\varphi_{nn}-P_j\varphi_{nn}\|+\|P_j\varphi_{nn}-P_j\varphi_{mm}\|$$
$$+\|K\varphi_{mm}-P_j\varphi_{mm}\|. \tag{4.38}$$

因为 $$K\varphi_{nn}-P_j\varphi_{nn}=K'_j\varphi_{nn}=\int_a^b K'_j(x, s)\varphi_{nn}(s)\,ds,$$

根据 Буняковский-Schwarz 不等式，推知

$$\|K\varphi_{nn}-P_j\varphi_{nn}\|^2\leqslant\|\varphi_{nn}\|^2\int_a^b\int_a^b|K'_j(x, s)|^2\,dx\,ds$$
$$<M^2\int_a^b\int_a^b|K'_j(x, s)|^2\,dx\,ds.$$

类似地，也有

$$\|K\varphi_{mm}-P_j\varphi_{mm}\|^2<M^2\int_a^b\int_a^b|K'_j(x, s)|^2\,dx\,ds.$$

由于关系式 (4.34)，可以选择一个充分大的正整数 j，使不等式 (4.38) 的右端第一项与第三项皆小于 $\varepsilon/3$，其中 ε 是任意小的正数．然后固定这个 j 值，利用极限(4.37)的存在性，可以选择一个充分大的 n_0，使当 $n\geqslant n_0$、$m\geqslant n_0$ 时，有 $\|P_j\varphi_{nn}-P_j\varphi_{mm}\|<\frac{\varepsilon}{3}$．于是，若 $n\geqslant n_0$、$m\geqslant n_0$，则有

$$\|K\varphi_{nn}-K\varphi_{mm}\|<\varepsilon,$$

即 $K\varphi_{nn}$ 按均值意义收敛，定理得证．

现在回到定理 4.5 的证明．

以 μ 表示 $|(K\varphi, \varphi)|$ 的上确界，即

$$\mu=\sup|(K\varphi, \varphi)|, \quad \|\varphi\|=1.$$

由上确界的定义，存在一个函数列 $\psi_n(x)$，这个函数列中的函数的模皆等于1，且有

$$\lim_{n\to\infty}|(K\psi_n, \psi_n)|=\mu.$$

因设核 $K(x, s)$ 是对称的，故数量积 $(K\psi_n, \psi_n)$ 是实数，且仅有三种可能的情况：

i) $\lim\limits_{n\to\infty}(K\psi_n, \psi_n)=\mu$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(K\psi_n, \psi_n)=-\mu$;

iii) 序列 $\psi_n(x)$ 可以分成两个序列 $\psi_n^{(1)}(x)$ 和 $\psi_n^{(2)}(x)$，使得

$$\lim_{n\to\infty}(K\psi_n^{(1)},\ \psi_n^{(1)})=\mu;$$

$$\lim_{n\to\infty}(K\psi_n^{(2)},\ \psi_n^{(2)})=-\mu.$$

我们仅讨论情况(i)，因对于情况(ii)可将原积分方程中的 λ 代为 $-\lambda$，且将 $K(x,\ s)$ 代为 $-K(x,\ s)$，这时(ii)就化为(i)．对于情况(iii)不妨就讨论其中的一个序列 $\psi_n^{(1)}(x)$，以下也都记为 $\psi_n(x)$．

由定理 4.7, 从序列$\{\psi_n(x)\}$中, 可以取出一个子序列, 不妨仍记为$\{\psi_n(x)\}$, 使得 $K\psi_n$ 均值收敛于 $\omega(x)$, 即有

$$\omega(x)=\lim_{n\to\infty}K\psi_n.$$

设 $\eta_n(x)$是在$[a,\ b]$上平方绝对可积的任意函数，t 是任意一个实数．函数 $\dfrac{\psi_n(x)+t\eta_n(x)}{\|\psi_n+t\eta_n\|}$ 的模显然等于 1, 于是由 μ 定义, 有

$$\left(K\frac{\psi_n+t\eta_n}{\|\psi_n+t\eta_n\|},\ \frac{\psi_n+t\eta_n}{\|\psi_n+t\eta_n\|}\right)\leqslant\mu,$$

由此可以得出

$$(K(\psi_n+t\eta_n),\ \psi_n+t\eta_n)\leqslant\mu(\psi_n+t\eta_n,\ \psi_n+t\eta_n).$$

注意到

$$(\psi_n,\ \psi_n)=\|\psi_n\|^2=1,$$

从上列不等式又可得出

$$(K\psi_n,\ \psi_n)-\mu+2t\mathrm{Re}(K\psi_n-\mu\psi_n,\ \eta_n)$$
$$+t^2[(K\eta_n,\ \eta_n)-\mu\|\eta_n\|^2]\leqslant 0, \tag{4.39}$$

上式左端是关于 t 的二次三项式．上列不等式表示这个二次三项式的符号保持不变．由此知, 它的判别式不取正值, 即

$$|\mathrm{Re}(K\psi_n-\mu\psi_n,\ \eta_n)|$$
$$\leqslant\sqrt{\mu\|\eta_n\|^2-(K\eta_n,\ \eta_n)}\cdot\sqrt{\mu-(K\psi_n,\ \psi_n)}. \tag{4.40}$$

现在设 η_n 是这样的函数, 使得

$$\mu\|\eta_n\|^2-(K\eta_n,\ \eta_n)<C, \tag{4.41}$$

其中 C 是不依赖于 n 的常数, 于是从(4.39)和(4.40)推得

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Re}(K\psi_n-\mu\psi_n,\ \eta_n)=0. \tag{4.42}$$

现在令

$$\eta_n(x)=K\psi_n-\mu\psi_n=-\mu\psi_n(x)+\int_a^b K(x,\ s)\psi_n(s)\,\mathrm{d}s,$$

可以证明这样的 $\eta_n(x)$ 能使不等式(4.41)成立. 事实上, 注意到 $\|\psi_n\|=1$, 并应用三角不等式, 有

$$\|\eta_n\|\leqslant\mu\|\psi_n\|+\left\{\int_a^b\left|\int_a^b K(x,\ s)\psi_n(s)\,\mathrm{d}s\right|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\mu+\left\{\int_a^b|\psi_n(x)|^2\mathrm{d}s\int_a^b\int_a^b|K(x,\ s)|^2\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\mu+B,$$

从而, 再注意到 $\|K\eta_n\|$ 有与上式 $\|K\psi_n\|$ 同样的估计式, 有

$$\mu\|\eta_n\|^2-(K\eta_n,\ \eta_n)$$
$$\leqslant\mu(\mu+B)^2+\|\eta_n\|\cdot\|K\eta_n\|$$
$$\leqslant\mu(\mu+B)^2+(\mu+B)\|\eta_n\|B$$
$$\leqslant(\mu+B)^3,$$

于是关系式(4.42)成为

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Re}(K\psi_n-\mu\psi_n,\ K\psi_n-\mu\psi_n)=0.$$

上式中的数量积为正数, 且等于 $\|K\psi_n-\mu\psi_n\|^2$, 故又有

$$\lim_{n\to\infty}\|K\psi_n-\mu\psi_n\|=0. \tag{4.43}$$

因为 $K\psi_n$ 均值收敛于 $\omega(x)$, 所以 $\psi_n(x)$ 均值收敛于 $\frac{1}{\mu}\omega(x)$. 记

$$\varphi_1(x)=\frac{1}{\mu}\omega(x),\ \ \lambda_1=\frac{1}{\mu},$$

于是有

$$\|K\psi_n-K\varphi_1\|\leqslant\|\psi_n-\varphi_1\|\left\{\int_a^b\int_a^b|K(x,\ s)|^2\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant\|\psi_n-\varphi_1\|\cdot B\to0,$$

联系(4.43)式, 又有

$$\|\varphi_1-\lambda K\varphi_1\|=\lambda_1\|\mu\varphi_1-K\varphi_1\|\leqslant\lambda[\|\mu\varphi_1-\mu\psi_n\|$$
$$+\|\mu\psi_n-K\psi_n\|+\|K\psi_n-K\varphi_1\|]\to0,$$

即有

$$\varphi_1(x)-\lambda_1K\varphi_1=0. \tag{4.44}$$

而 $\varphi_1(x)$ 的模显然等于 1，故它不能恒等于零. 这样一来，我们证明了 λ_1 是核 $K(x, s)$ 的特征值. 从证明过程可知道 λ_1 的绝对值的倒数就是 $|(K\varphi, \varphi)|$ 的上确界，且是最小的特征值. 定理 4.5 得证.

§4 Hilbert-Schmidt 定理

由§3 中的讨论知道，对称核的一切特征函数序列可以变为一个正交标准系. Hilbert-Schmidt 定理告诉我们，对任意的平方绝对可积函数 $h(x)$，经核产生的函数 $f(x)=Kh$，一定可以展成关于这一正交标准系的绝对收敛且一致收敛的 Fourier 级数. 这是一个很重要的定理. 在决定第一特征值和进而讨论确定次一特征值时，这个定理有重要的应用.

现在先证明几个引理:

引理 4.1 二次迭核的一切特征值的集合与所设核的一切特征值的平方的集合是相同的.

证明 首先设 λ_0 是核 $K(x, s)$ 的特征值，且 $\varphi_0(x)$ 是与 λ_0 对应的特征函数，于是有 $(E-\lambda_0 K)\varphi_0=0$. 在此式两边乘以算子 $E+\lambda_0 K$，得到 $(E-\lambda_0^2 K^2)\varphi_0=0$，或写成

$$\varphi_0(x)-\lambda_0^2\int_a^b K_2(x, s)\varphi_0(s)\,ds=0,$$

因此 λ_0^2 是 $K_2(x, s)$ 的特征值.

其次，设 μ_0 是 $K_2(x, s)$ 的特征值，且 $\varphi_0(x)$ 是与 μ_0 对应的特征函数，因此有 $(E-\mu_0 K^2)\varphi_0=0$，令 $\mu_0=\lambda_0^2$，则可写成

$$(E-\lambda_0 K)(E+\lambda_0 K)\varphi_0=0. \tag{4.45}$$

若 λ_0 是核 $K(x, s)$ 的特征值，则引理 4.1 就被证明了. 若 λ_0 不是核 $K(x, s)$ 的特征值，记 $(E+\lambda_0 K)\varphi_0=\varphi_1(x)$，则由方程 (4.45) 知

$$(E-\lambda_0 K)\varphi_1=0,$$

但按假设 λ_0 不是核 $K(x, s)$ 的特征值，故又有 $\varphi_1(x)=0$ 或

$$(E+\lambda_0 K)\varphi_0=0,$$

这表明 $-\lambda_0$ 是核 $K(x, s)$ 的特征值. 引理得证.

可证明更一般的情况: n 次迭核 $K_n(x, s)$ 的一切特征值集合与核 $K(x, s)$ 的一切特征值的 n 次乘幂组成的集合是相同的.

注 这里的证明不要求核是对称的, 因此这个引理对一般的核也是成立的.

引理 4.2 设核 $K(x, s)$ 是对称核, 且适合条件

$$\int_a^b |K(x, s)|^2 \mathrm{d}s < C_1,\ C_1 \text{ 是正常数.}$$

又设 $\varphi_n(x)\ (n=1, 2, \cdots)$ 是 $K(x, s)$ 的一切特征函数所成的序列, 且 λ_n 是与 $\varphi_n(x)$ 对应的特征值. 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\varphi_n^2(x)|}{\lambda_n^2}$$

收敛, 且它的和不大于常数 C_1.

证明 暂固定 x 值, 而视 $K(x, s)$ 是变量 s 的函数. 我们求出 $K(x, s)$ 关于正交标准系 $\overline{\varphi_n(s)}\ (n=1, 2, \cdots)$ 的 Fourier 级数, 以 a_n 表示其系数, 于是有

$$a_n=\int_a^b K(x, s)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}s=\frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n}.$$

由 Bessel 不等式, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\varphi_n^2(x)|}{\lambda_n^2}\leqslant\int_a^b |K(x, s)|^2\mathrm{d}s<C_1, \tag{4.46}$$

引理得证.

引理 4.3 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \lambda_{n+1}, \cdots$ 是对称核 $K(x, s)$ 的一切特征值集合, 而 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x), \varphi_{n+1}(x), \cdots$ 是对应的特征函数. 则对称核

$$K^{(n)}(x, s)=K(x, s)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(s)}}{\lambda_k}$$

有特征值 $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \cdots$, 它们与特征函数 $\varphi_{n+1}(x), \varphi_{n+2}(x), \cdots$ 相对应, 而 $K(x, s)$ 的其它特征值和特征函数均不是 $K^{(n)}(x, s)$ 的特征值和特征函数.

证明　考察方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K^{(n)}(x, s)\varphi(s)\mathrm{d}s=0, \tag{4.47}$$

或写出它的下列形式:

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s+\lambda\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}(\varphi, \varphi_k)=0. \tag{4.48}$$

在方程 (4.48) 的左边，令 $\lambda=\lambda_j$ 且 $\varphi(x)=\varphi_j(x)\,(j>n)$，因这时 $\varphi_j(x)$ 和 $\varphi_k(x)\,(k\leqslant n)$ 成正交，即有 $(\varphi_j, \varphi_k)=0$，而 λ_j 和 $\varphi_j(x)$ 是 $K(x, s)$ 的特征值和特征函数，即有

$$\varphi_j(x)-\lambda_j\int_a^b K(x, s)\varphi_j(s)\mathrm{d}s=0,$$

所以

$$\varphi_j(x)-\lambda_j\int_a^b K^{(n)}(x, s)\varphi_j(s)\mathrm{d}s=0.$$

换言之，λ_j 和 $\varphi_j(x)$ $(j>n)$ 皆是核 $K^{(n)}(x, s)$ 的特征值和特征函数.

现在证明 $\varphi_j(x)$ $(j>n)$ 构成方程(4.47)或(4.48)的完全系.

设 λ_0 和 $\varphi_0(x)$ 是核 $K^{(n)}(x, s)$ 的任一特征值及与其对应的特征函数，这时有

$$\varphi_0(x)-\lambda_0 K\varphi_0+\lambda_0\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}(\varphi_0, \varphi_k)=0, \tag{4.49}$$

将这等式乘以 $\overline{\varphi_j(x)}$，且自 a 至 b 取积分，并设 $j\leqslant n$，注意到 $\{\varphi_k(x)\}$ 是正交标准系，从而得到

$$(\varphi_0, \varphi_j)-\lambda_0(K\varphi_0, \varphi_j)+\frac{\lambda_0}{\lambda_j}(\varphi_0, \varphi_j)=0. \tag{4.50}$$

又因 $(K\varphi_0, \varphi_j)=(\varphi_0, K\varphi_j)$，故又有

$$\begin{aligned}&\frac{\lambda_0}{\lambda_j}(\varphi_0, \varphi_j)-\lambda_0(K\varphi_0, \varphi_j)\\&=\frac{\lambda_0}{\lambda_j}[(\varphi_0, \varphi_j)-\lambda_j(\varphi_0, K\varphi_j)]\\&=\frac{\lambda_0}{\lambda_j}(\varphi_0, \varphi_j-\lambda_j K\varphi_j)=0,\end{aligned}$$

于是由(4.50)式，得

$$(\varphi_0, \varphi_j)=0 \quad (j\leqslant n).$$

回到(4.49)式，又得

$$\varphi_0(x)-\lambda_0\int_a^b K(x, s)\varphi_0(s)\mathrm{d}s=0.$$

这也就指出，λ_0 和 $\varphi_0(x)$ 也是 $K(x, s)$ 的特征值和特征函数，且 $\varphi_0(x)$ 同一切函数 $\varphi_j(x)$ $(j\leqslant n)$ 又成正交，故 $\varphi_0(x)$ 必定是 $\varphi_{n+1}(x)$，$\varphi_{n+2}(x)$，… 中的某一个或是它们的线性组合，且 λ_0 也取 λ_{n+1}，λ_{n+2}，…中的某一个值. 从而证明引理 4.3.

由引理 4.3 可知，若对称核 $K(x, s)$ 仅有有限个特征值 λ_1，λ_2，…，λ_n，则

$$K^{(n)}(x, s)=K(x, s)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(s)}}{\lambda_k}$$

没有特征值，又由§3中的定理 4.1 知道，必有 $K^{(n)}(x, s)\equiv 0$. 从而有

$$K(x, s)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(s)}}{\lambda_k},$$

即推知 $K(x, s)$ 是退化核. 反之，我们已经知道一切退化核只能有有限个特征值. 由此得到下面的推论:

推论 1 对称核是退化核的充分必要条件是：它仅有有限个特征值.

定理 4.8(Hilbert-Schmidt 定理) 设 λ_1, λ_2, …, λ_n, …是对称核 $K(x,s)$ 的一切特征值，且 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$, …是与这些特征值对应的特征函数. 其次，设 $h(x)$ 是在区间 $[a, b]$ 内的平方绝对可积函数. 如果积分

$$\int_a^b |K(x, s)|^2\mathrm{d}s<C_1 \quad (C_1 \text{为正常数}),$$

则函数

$$f(x)=Kh=\int_a^b K(x, s)h(s)\,\mathrm{d}s$$

可展为正交标准系 $\{\varphi_n(x)\}$ 的绝对收敛且一致收敛的 Fourier 级数

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k\varphi_k(x),\ f_k=(f,\ \varphi_k), \tag{4.51}$$

或 $$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h_k}{\lambda_k}\varphi_k(x),\ f_k=\frac{h_k}{\lambda_k},\ h_k=(h,\ \varphi_k).$$

证明 首先求出 $f(x)=Kh$ 关于正交标准系 $\{\varphi_k(x)\}$ 的 Fourier 级数

$$f(x)=Kh\sim\sum_{k=0}^{\infty} f_k\varphi_k(x), \tag{4.52}$$

其中 $f_k=(f,\ \varphi_k)$. 注意到关系式

$$f_k=(f,\ \varphi_k)=(Kh,\ \varphi_k)=(h,\ K\varphi_k),$$

但 $\varphi_k-\lambda_k K\varphi_k=0$, 从而 $K\varphi_k=\frac{1}{\lambda_k}\varphi_k(x)$, 进而得到

$$f_k=\frac{1}{\lambda_k}(h,\ \varphi_k)=\frac{h_k}{\lambda_k}.$$

这时, 级数(4.51)就有形式

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k\varphi_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h_k}{\lambda_k}\varphi_k(x).$$

现在对这级数的余项作下面的估计: 由 Cauchy 不等式, 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} h_k\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right|^2\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}|h_k|^2\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{|\varphi_k^2(x)|}{\lambda_k^2}$$
$$\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}|h_k|^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2},$$

由引理 4.2, 不等式右边的第二个因子是有界的, 而由于级数 $\sum_{k=1}^{\infty}|h_k|^2$ 是收敛的, 故可使第一个因子是一个任意小的正数. 由此推知级数(4.51)是绝对收敛且一致收敛的.

用 $\omega(x)$ 表示级数(4.51)的和, 且用 $\omega_n(x)$ 表示它的第 n 个部分和. 估计值 $\|f(x)-\omega_n(x)\|^2$. 按定义, 有

$$f(x)-\omega_n(x)=Kh-\sum_{k=1}^{n}\frac{h_k}{\lambda_k}\varphi_k(x)$$
$$=Kh-\sum_{k=1}^{n}\frac{(h,\ \varphi_k)}{\lambda_k}\varphi_k(x)=K^{(n)}h,$$

其中 $$K^{(n)}h=\int_a^b K^{(n)}(x,\ s)h(s)\,ds,$$

所以

$$\|f(x)-\omega_n(x)\|^2=\|K^{(n)}h\|^2=(K^{(n)}h,\ K^{(n)}h)$$
$$=(h,\ (K^{(n)})^2h).$$

$(K^{(n)})^2$ 是关于 $K^{(n)}(x,s)$ 的二次迭核，通常又以 $K_2^{(n)}$ 表示之，于是有

$$\|f(x)-\omega_n(x)\|^2=(h,\ K_2^{(n)}h).$$

由于引理 4.3 及引理 4.1，$K_2^{(n)}(x,s)$ 的最小特征值等于 λ_{n+1}^2，且由§ 3 的定理 4.5，有

$$\frac{1}{\lambda_{n+1}^2}=\max\frac{(\varphi,\ K_2^{(n)}\varphi)}{(\varphi,\ \varphi)}.$$

于是对于任意一个函数 $h(x)$，有

$$\frac{(h,\ K_2^{(n)}h)}{(h,\ h)}\leqslant\frac{1}{\lambda_{n+1}^2},$$

或
$$(h,\ K_2^{(n)}h)\leqslant\frac{1}{\lambda_{n+1}^2}(h,\ h).$$

但当 $n\to\infty$ 时，$\lambda_{n+1}\to\infty$，由此得出

$$\|f(x)-\omega_n(x)\|^2=(h,\ K_2^{(n)}h)\to 0\quad(n\to\infty).$$

又因 $\omega_n(x)$ 一致收敛于 $\omega(x)$，故必均值收敛，即当 $n\to\infty$ 时，$\|\omega_n-\omega\|\to 0$. 这样一来，有

$$\|f-\omega\|\leqslant\|f-\omega_n\|+\|\omega_n-\omega\|\to 0,$$

即
$$f(x)\equiv\omega(x).$$

定理证毕.

定理 4.9 设 $\{\lambda_k\}$ 和 $\{\varphi_k(x)\}$ 是对称核 $K(x,s)$ 的一切特征值和对应的正交标准特征函数系，且

$$\int_a^b|K(x,s)|^2ds<C_1\quad(C_1\text{为正常数}).$$

则 $K(x,s)$ 可以展为核的特征函数系的 Fourier 级数

$$K(x,s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(s)}}{\lambda_k},\tag{4.53}$$

且这级数同时关于两个变量 x 和 s 是收敛和均值收敛的.

证明 首先要指出，当对称核的特征值和特征函数为有限个

时，根据引理 4.3 的推论 1 知，必有

$$K(x,\ s)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k(x)\,\overline{\varphi_k(s)}}{\lambda_k},\tag{4.54}$$

因此，我们只要讨论核 $K(x,\ s)$ 的特征值和特征函数为无限个的情形即可.

作函数

$$R_m(x,\ s)=K(x,\ s)-\sum_{k=1}^{m}\frac{\varphi_k(x)\,\overline{\varphi_k(s)}}{\lambda_k},\tag{4.55}$$

有
$$\begin{aligned}R_m(x)&=\int_a^b|R_m(x,\ s)|^2\mathrm{d}s\\&=\int_a^b\left[K(x,\ s)-\sum_{k=1}^{m}\frac{\varphi_k(x)\,\overline{\varphi_k(s)}}{\lambda_k}\right]\\&\quad\cdot\left[\overline{K(x,\ s)}-\sum_{j=1}^{m}\frac{\overline{\varphi_j(x)}\,\varphi_j(s)}{\lambda_j}\right]\mathrm{d}s\\&=\int_a^b|K(x,\ s)|^2\mathrm{d}s-\sum_{k=1}^{m}\frac{\varphi_k(x)\,\overline{\varphi_k(s)}}{\lambda_k^2}\geqslant 0\end{aligned}$$

由此
$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\varphi_k(x)\,\overline{\varphi_k(x)}}{\lambda_k^2}\leqslant\int_a^b|K(x,\ s)|^2\mathrm{d}s\leqslant C_1.$$

显然又有

$$\int_a^b R_m(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\int_a^b|K(x,\ s)|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\lambda_k^2}\geqslant 0.$$

或
$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\lambda_k^2}\leqslant\int_a^b\int_a^b|K(x,\ s)|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s=B^2.$$

换言之，函数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2}$ 与数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}$ 都是收敛的.

以 $\tilde{K}(x,\ s)$ 表示以下级数的和：

$$\tilde{K}(x,\ s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\,\overline{\varphi_k(s)}}{\lambda_k}.\tag{4.56}$$

分两种情形，证明以下事实：

1) 若级数(4.56)一致收敛，则 $\tilde{K}(x,\ s)\equiv K(x,\ s)$.

记
$$R(x,\ s)=K(x,\ s)-\tilde{K}(x,\ s),$$

有
$$\int_a^b R(x,\ s)\,\overline{\varphi_m(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b K(x, s) \overline{\varphi_m(x)} \mathrm{d}x$$
$$- \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_k(x) \overline{\varphi_m(x)} \mathrm{d}x \int_a^b \overline{K(s, t)} \overline{\varphi_k(t)} \mathrm{d}t$$
$$= \int_a^b K(x, s) \overline{\varphi_m(x)} \mathrm{d}x - \int_a^b \overline{K(s, t)} \overline{\varphi_m(t)} \mathrm{d}t = 0, \tag{4.57}$$

即 $R(x, s)$同一切 $\varphi_m(x)$成正交．此外，$R(x, s)$显然是对称的．

若对称核 $R(x, s) \not\equiv 0$，则至少有一个特征值 λ_R 与对应的特征函数 $\varphi_R(x)$：

$$\varphi_R(x) = \lambda_R \int_a^b R(x, s) \varphi_R(s) \mathrm{d}s. \tag{4.58}$$

由(4.57)，可得 $\varphi_R(x)$ 也同一切 $\varphi_m(x)$ 成正交，即

$$\int_a^b \varphi_R(x) \overline{\varphi_m(x)} \mathrm{d}x = \lambda_R \int_a^b \varphi_R(s) \mathrm{d}s \int_a^b R(x, s) \overline{\varphi_m(x)} \mathrm{d}x = 0. \tag{4.59}$$

这样一来，注意到假设级数(4.56)是一致收敛的，可得

$$\int_a^b \widetilde{K}(x, s) \varphi_R(s) \mathrm{d}s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \int_a^b \overline{\varphi_k(s)} \varphi_R(s) \mathrm{d}s = 0,$$

于是

$$\varphi_R(x) = \lambda_R \int_a^b [K(x, s) - \widetilde{K}(x, s)] \varphi_R(s) \mathrm{d}s$$
$$= \lambda_R \int_a^b K(x, s) \varphi_R(s) \mathrm{d}s,$$

即 $\varphi_R(x)$ 也是对称核 $K(x, s)$ 的特征函数，且又同该核的一切特征函数成正交，故有

$$\varphi_R(x) \equiv 0.$$

换言之，对称核 $R(x, s)$没有特征值，从而，必有 $R(x, s) \equiv 0$，即有下式成立：

$$K(x, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \overline{\varphi_k(s)}}{\lambda_k}.$$

2) 若级数 (4.56) 不是一致收敛的，则必均值收敛，且收敛于 $K(x, s)$．

这是因为

$$\int_a^b \left| \sum_{k=n}^{n+p} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(s)}}{\lambda_k} \right|^2 ds$$

$$= \int_a^b \left[\sum_{k=n}^{n+p} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(s)}}{\lambda_k} \right] \left[\sum_{j=n}^{n+p} \frac{\overline{\varphi_j(x)}\varphi_j(s)}{\lambda_j} \right] ds$$

$$= \sum_{k=n}^{n+p} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(x)}}{\lambda_k^2} \to 0, \quad \text{当 } n \to \infty \text{ 时}.$$

所以级数(4.56)是均值收敛的，仍记其和为 $\widetilde{K}(x, s)$. 类似 1)中的讨论，考察

$$J = \int_a^b \widetilde{K}(x, s)\varphi_R(s)\,ds,$$

由于(4.59)式，又有

$$J = \int_a^b \left[\widetilde{K}(x, s) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(s)}}{\lambda_k} \right] \varphi_R(s)\,ds,$$

从而，当 $n \to \infty$ 时，有

$$|J|^2 \leqslant \int_a^b \left| \widetilde{K}(x, s) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(s)}}{\lambda_k} \right|^2 ds \int_a^b |\varphi_R(s)|^2 ds \to 0,$$

即有

$$J = \int_a^b \widetilde{K}(x, s)\varphi_R(s)\,ds = 0.$$

余下重复 1)中的讨论，有 $\varphi_R(x) \equiv 0$，进而有 $R(x, s) \equiv 0$，即最后也得到

$$K(x, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(s)}}{\lambda_k}.$$

定理证毕.

推论 2 级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^m} \tag{4.60}$$

不仅当 $m=2$ 时是收敛的，且对一切正整数 m 2 都是收敛的.

特别当核 $K(x, s)$ 为连续对称核时，进一步有以下的 Mercer 定理:

定理 4.10 设连续对称核 $K(x, s)$ 的一切特征值从某一个起保持定号，即除有限个特征值外，其余的所有特征值均保持正号

或负号，则展开式(4.53)成立，且级数同时关于两个变量 x、s 绝对收敛和一致收敛。

证明 首先证明，当对称核 $K(x,s)$ 的一切特征值都是正的时，则必有 $K(s, s)>0$. 事实上，若不然，则必有一点 (x_0, s_0) 使得 $K(s_0, s_0)<0$，于是存在着点 (x_0, s_0) 的一个邻域：$|x-x_0|<\varepsilon$、$|s-s_0|<\varepsilon$，使在这个邻域内 $K(x, s)<0$，这时可以定义函数 $\varphi(x)$：当 $|x-x_0|\leqslant\varepsilon$ 时，$\varphi(x)=1$，在其它处，$\varphi(x)=0$，而对此函数则有

$$(K\varphi, \varphi)=\int_a^b\int_a^b K(x, s)\varphi(x)\overline{\varphi(s)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s$$

$$=\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\int_{s_0-\varepsilon}^{s_0+\varepsilon} K(x, s)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s<0.$$

另外，又由 Hilbert-Schmidt 定理可推得

$$(K\varphi, \varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h_k}{\lambda_k}(\varphi_k, \varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|h_k|^2}{\lambda_k},$$

其中 $h_k=(\varphi, \varphi_k)$，而当所有 $\lambda_k>0$ 时，上式右端大于零，由此导致矛盾. 因此，恒有 $K(s, s)\geqslant 0$.

这样一来，不论 $K(x,s)$ 的一切特征值都是正的或者除有限个之外都是正的，必都存在适当大的 n，使得核

$$H(x, s)=K(x, s)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(s)}}{\lambda_i}$$

的一切特征值 $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \cdots$ 都大于零. 从而有 $H(s, s)>0$，即有

$$K(s, s)-\sum_{i=1}^{n}\frac{|\varphi_i(s)|^2}{\lambda_i}\geqslant 0, \tag{4.61}$$

故级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{|\varphi_i(s)|^2}{\lambda_i}$ 对给定的值 s 均收敛.

其次，考察级数(4.53)的部分和，由 Schwarz 不等式得

$$\left(\sum_{k=m}^{m+p}\left|\frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(s)}}{\lambda_k}\right|\right)^2\leqslant\sum_{k=m}^{m+p}\frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k}\sum_{k=m}^{m+p}\frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k}, \tag{4.62}$$

这里不妨设 $m\geqslant n$. 因为 $K(x, x)$ 是连续函数，所以必存在常数 M，使得

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|\varphi_i(x)|^2}{\lambda_i}\leqslant M, \tag{4.63}$$

由此，联系式(4.62)，可得

$$\left(\sum_{k=m}^{m+p}\frac{|\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(s)}|}{\lambda_k}\right)^2\leqslant M\cdot\sum_{k=m}^{m+p}\frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k}. \tag{4.64}$$

换言之，级数 $\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(s)}/\lambda_i$ 当固定 x 或 s 时，对另一变量绝对且一致收敛．

再注意到收敛级数 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|\varphi_i(x)|^2}{\lambda_i}$ 的和 $K(x, x)$ 是连续的，因而按单变量的连续正值函数项级数收敛于一个连续函数必一致收敛的重要性质(即 Dini 定理*))，我们可由(4.64)式最后得到级数(4.53)，同时关于两个变量 x、s 是绝对且一致收敛的．这就证明了定理 4.10．

定理 4.11 对称核 $K(x, s)$ 的一切迭核 $K_m(x, s)$ $(m\geqslant 2)$ 都可以展成核的特征函数系的 Fourier 级数：

$$K_m(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k^m}, \tag{4.65}$$

且当 $m\geqslant 3$ 时，这级数关于两个变量 x、t 是绝对收敛且一致收敛的；而当 $m=2$ 时，任意固定一个变量时，级数关于另一个变量是绝对收敛且一致收敛的．

证明 在Hilbert-Schmidt公式(4.51)中，令 $h(s)=K(s, t)$，有

$$K_2(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega_k(t)}{\lambda_k}\varphi_k(x),$$

其中 $\omega_k(t)$ 是 $K(x, t)$ 关于它的特征函数系 $\{\varphi_k(x)\}$ 的 Fourier 系数．又注意到核 $K(x, t)$ 是对称的，故由 Fourier 系数的公式，可得

---

*) Dini 定理：若级数 $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ 的一切项 $f_k(x)$ 都是区间$[a, b]$内的非负连续函数，级数在$[a, b]$内任何点收敛，且其和是该区间内的连续函数，则级数 $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ 在区间$[a, b]$内一致收敛．

$$\omega_k(t)=\int_a^b K(x,\ t)\overline{\varphi_k(x)}\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b \overline{K(t,\ x)}\,\overline{\varphi_k(x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda_k}\overline{\varphi_k(t)},$$

由此，得二次迭核的展开式为

$$K_2(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k^2}.$$

类似地，可得m次叠核的展开式为

$$K_m(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k^m}.$$

对 $m=2$ 的情形，由 Hilbert-Schmidt 定理，不难直接推知 $K_2(x, t)$ 的展开式在固定任一变量时，关于另一变量是绝对收敛且一致收敛的.

对 $m\geqslant 3$ 的情形，考察级数(4.65)的余项

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k^m}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{|\lambda_{n+1}^{m-2}|}\sum_{k=n+1}^{n+p}\left|\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right|\cdot\left|\frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{|\lambda_{n+1}^{m-2}|}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right|\cdot\left|\frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k}\right|,$$

应用 Cauchy 不等式，且由引理 4.2，有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k^m}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{|\lambda_{n+1}^{m-2}|}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\varphi_k^2(x)|}{\lambda_k^2}\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\varphi_k^2(t)|}{\lambda_k^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\frac{C_1}{|\lambda_{n+1}^{m-2}|}.$$

令 $n\to\infty$，这时 $\lambda_n\to\infty$，故上式右端趋于零. 从而得知级数(4.65)是绝对收敛且一致收敛的.

例 3 求方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^{\pi}K(x,\ s)\varphi(s)\mathrm{d}s,\quad K(x,\ s)=\begin{cases}\sin x\cos s, & x\leqslant s;\\ \sin s\cos x, & s\leqslant x.\end{cases}\tag{4.66}$$

的一切特征值和特征函数，并展开核 $K(x, s)$ 为 Fourier级数.

将方程(4.66)写成

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^x \cos x \sin s\,\varphi(s)\,ds+\lambda\int_x^\pi \sin x \cos s\,\varphi(s)\,ds,$$

两边对 x 求导，得

$$\varphi'(x)=-\lambda\sin x\int_0^x \sin s\,\varphi(s)\,ds+\lambda\cos x\int_x^\pi \cos s\,\varphi(s)\,ds,$$

$$\begin{aligned}\varphi''(x)=&-\lambda\cos x\int_0^x \sin s\,\varphi(s)\,ds\\&-\lambda\sin x\int_x^\pi \cos s\,\varphi(s)\,ds-\lambda\varphi(x),\end{aligned}$$

因此，$\varphi(x)$满足二阶常微分方程

$$\varphi''(x)+(1+\lambda)\varphi(x)=0 \tag{4.67}$$

和边界条件

$$\varphi(0)=0,\quad \varphi'(\pi)=0, \tag{4.68}$$

而这仅当 $\lambda+1\geqslant 0$ 时才有解. 应用 Euler 方程的解法，容易得到它的一切解为

$$\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\quad (k=1,\ 2,\ \cdots).$$

于是，积分方程 (4.66) 的所有特征值和所有正交标准的特征函数为

$$\lambda_k=\left(k-\frac{1}{2}\right)^2-1,\quad \varphi_k(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\quad (k=1,\ 2,\ \cdots). \tag{4.69}$$

核 $K(x, s)$的 Fourier 级数为

$$K(x, s)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)s}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2-1}. \tag{4.70}$$

§5 求第一特征值的方法

本节将给出一些求第一特征值，也即按绝对值意义的最小特

征值的方法.

1. Ritz 方法

由§3定理4.5,求对称核的(按绝对值意义)最小特征值的问题,归之为在$(\varphi, \varphi)=1$的条件下求

$$|(K\varphi, \varphi)|=\left|\int_a^b\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\overline{\varphi(x)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right| \tag{4.71}$$

的极大值问题.

任取一正交标准系$\{\psi_k(x)\}$,要求它是完备的,于是对于任意函数$f(x)$,给定任意正数ε,恒可选择正整数n和系数$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$,使得不等式

$$\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\psi_k(x)\right\|<\varepsilon$$

成立. 现在,在(4.71)中取

$$\varphi(x)=a_1\psi_1(x)+a_2\psi_2(x)+\cdots+a_n\psi_n(x),$$

其中系数$a_1, a_2, \cdots, a_n$是满足条件$(\varphi, \varphi)=1$的任意常数, 这个条件又可写成以下形式

$$\sum_{j,k=1}^{n}a_j\overline{a}_k(\psi_j, \psi_k)=\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2=1. \tag{4.72}$$

于是,(4.71)可以写为

$$|(K\varphi, \varphi)|=\left|\sum_{j,k=1}^{n}A_{jk}a_j\overline{a}_k\right|, \tag{4.73}$$

其中 $$A_{jk}=\int_a^b\int_a^b K(x, s)\psi_j(x)\overline{\psi_k(s)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s.$$

注意到由于核$K(x, s)$是对称的,故有$A_{jk}=\overline{A}_{kj}$.

于是, 上述极大值问题又归结为在条件(4.72)下求(4.73)式的极大值问题. 这是多变量函数的极大值问题,解这个问题,且计算出(4.73)的极大值, 就得到所要求的最小特征值的绝对值的近似值.

下面证明,这个近似值不小于真值,且当$n\to\infty$时,它的趋近于真值.

用$|\lambda_1^{(n)}|$表示(4.73)式的极大值的倒数,且用$\varphi^{(n)}(x)$表示使这

个极大值达到的函数. 于是

$$\frac{1}{|\lambda_1^{(n)}|}=|(K\varphi^{(n)},\ \varphi^{(n)})|\leqslant\max|(K\varphi,\ \varphi)|=\frac{1}{|\lambda_1|},$$

这里 λ_1 是所设核的按绝对值意义的最小特征值. 由此知

$$|\lambda_1^{(n)}|\geqslant|\lambda_1|.$$

再证, 当 $n\to\infty$ 时, $|\lambda_1^{(n)}|\to|\lambda_1|$. 因函数系 $\{\psi_k(x)\}$ 是完备的, 因此存在形如下面的函数

$$\omega(x)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\psi_k(x)\quad(\alpha_k\ 为常数),$$

使 $\|\varphi_1-\omega\|<\frac{\varepsilon}{4}$, 这里 $\varphi_1(x)$ 是所设核与 λ_1 对应的特征函数, ε 是任意正数. 记

$$\omega_1(x)=\frac{\omega(x)}{\|\omega\|},\ \|\omega_1\|=1.$$

这时, 因 $\|\varphi_1\|-\|\omega\|\leqslant\|\varphi_1-\omega\|<\frac{\varepsilon}{4}$, 从而 $\|\omega\|>1-\frac{\varepsilon}{4}$, 记 $\|\omega\|=\sigma$, 就有

$$\|\varphi_1-\omega_1\|=\frac{\|\sigma\varphi_1-\omega\|}{\sigma}<\frac{\|\sigma\varphi_1-\omega\|}{1-\frac{\varepsilon}{4}},$$

取 ε 如此小, 使它适合不等式 $1-\frac{\varepsilon}{4}>\frac{1}{2}$, 则由上式推得

$$\begin{aligned}\|\varphi_1-\omega_1\|&<2\|\sigma\varphi_1-\omega\|\\&=2\|\varphi_1-\omega-(1-\sigma)\varphi_1\|\\&\leqslant2\|\varphi_1-\omega\|+2(1-\sigma)<\varepsilon.\end{aligned}$$

现在估计以下的差:

$$A=|(K\varphi_1,\ \varphi_1)|-|(K\omega_1,\ \omega_1)|.$$

由于 ω_1 满足条件 $(\omega_1,\ \omega_1)=1$, 故由 § 3 定理 4.5, 有 $A>0$. 显然又有

$$A\leqslant|(K\varphi_1,\ \varphi_1)-(K\omega_1,\ \omega_1)|.$$

因为

$$(K(\varphi_1+\omega_1),\ \varphi_1-\omega_1)=(K\varphi_1+K\omega_1,\ \varphi_1-\omega_1)$$

$$= (K\varphi_1,\ \varphi_1) + (K\omega_1,\ \varphi_1) - (K\varphi_1,\ \omega_1) - (K\omega_1,\ \omega_1)$$
$$= (K\varphi_1,\ \varphi_1) + (\omega_1,\ K\varphi_1) - \overline{(\omega_1,\ K\varphi_1)} - (K\omega_1,\ \omega_1),$$

在上式两边取共轭,将所得的两个式子相加,得

$$\begin{aligned}&2\mathrm{Re}(K(\varphi_1+\omega_1),\ \varphi_1-\omega_1)\\&=2\mathrm{Re}[(K\varphi_1,\ \varphi_1)-(K\omega_1,\ \omega_1)]\\&=2[(K\varphi_1,\ \varphi_1)-(K\omega_1,\ \omega_1)],\end{aligned}$$

所以

$$|(K\varphi_1,\ \varphi_1)-(K\omega_1,\ \omega_1)|\leqslant|(K(\varphi_1+\omega_1),\ \varphi_1-\omega_1)|,$$

由此,有

$$\begin{aligned}A^2&\leqslant\|K(\varphi_1+\omega_1)\|^2\|\varphi_1-\omega_1\|^2\\&<\varepsilon^2\|K(\varphi_1+\omega_1)\|^2.\end{aligned}$$

应用 Буняковский-Schwarz 不等式,又得到

$$\begin{aligned}&\|K(\varphi_1+\omega_1)\|^2\\&=\int_a^b\left|\int_a^b K(x,\ s)[\varphi_1(s)+\omega_1(s)]\,\mathrm{d}s\right|^2\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_a^b|\varphi_1(s)+\omega_1(s)|^2\,\mathrm{d}s\int_a^b\int_a^b|K(x,\ s)|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\\&\leqslant(\|\varphi_1\|+\|\omega_1\|)^2\int_a^b\int_a^b|K(x,\ s)|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\\&\leqslant 4B^2,\end{aligned}$$

所以有 $$A^2\leqslant 4\varepsilon^2B^2.$$

注意到 $\varphi^{(n)}(x)$ 的定义,有

$$|(K\varphi_1,\ \varphi_1)|\geqslant|(K\varphi^{(n)},\ \varphi^{(n)})|\geqslant|(K\omega_1,\ \omega_1)|.$$

最后得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\lambda_1|}-\frac{1}{|\lambda_1^{(n)}|}&=|(K\varphi_1,\ \varphi_1)|-|(K\varphi^{(n)},\ \varphi^{(n)})|\\&\leqslant|(K\varphi_1,\ \varphi_1)|-|(K\omega_1,\ \omega_1)|=A\leqslant 2B\varepsilon.\end{aligned}$$

这就是所要证明的.

特别是,若 $K(x,\ s)$ 是实对称核,这时条件(4.72)取为实的等式

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2 = 1. \tag{4.74}$$

又设 $(K\varphi, \varphi)$ 仅取正值——这样的核称为**正定核**，这时等式(4.73)成为下面的二次式

$$(K\varphi, \varphi) = \sum_{j,k=1}^{n} A_{jk} a_j a_k. \tag{4.75}$$

于是，原先的极大值问题归结为在条件(4.74)下求(4.75)式的极大值．下面，我们用比较简便的 Lagrange 乘子法求它的解．

首先引进记号

$$F = \sum_{j,k=1}^{n} A_{jk} a_j a_k;$$

$$\Phi = F - \sigma \sum_{j=1}^{n} a_j^2.$$

其中 σ 是待定乘数．于是，使(4.75)达到极值的变量 a_j 由下面的方程决定：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_j} = \frac{\partial F}{\partial a_j} - 2\sigma a_j = 0 \quad (j = 1, \cdots, n),$$

或写为

$$\sum_{k=1}^{n} A_{jk} a_k - \sigma a_j = 0 \quad (j = 1, \cdots, n). \tag{4.76}$$

代数方程组(4.76)是线性齐次式，因为 $\sum_{j=1}^{n} a_j^2 = 1$，所以系数 a_j 不全为零，因而方程组(4.76)的系数行列式必须等于零，于是，得到关于待定数 σ 的一个方程式

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \sigma & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - \sigma & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} - \sigma \end{vmatrix} = 0. \tag{4.77}$$

以 a_j 乘(4.76)式，且对于 j 从 1 至 n 求和，注意到 $\sum_{j=1}^{n} a_j^2 = 1$，就得到 $\sigma = F$．这时 F 显然是极大值，且极大值也显然等于方程(4.77)的最大根．

在求特征值的同时，决定它所对应的特征函数也是很重要的，

但这个问题要比确定特征值复杂得多．如果同已求出的特征值相对应的特征函数是唯一的，则问题的解决比较简单，这时只须从方程组(4.76)求得 $a_j(j=1, \cdots, n)$，于是

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\psi_k(x)$$

就是所要求的特征函数的近似式．

例 4 考虑方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1 K(x, s)\varphi(s)\mathrm{d}s, \tag{4.78}$$

其中

$$K(x, s)=\begin{cases} x, & x\leqslant s; \\ s, & s\leqslant x \end{cases} \tag{4.79}$$

是对称核．我们取确定在[0, 1]内的如下的正交标准系

$$\psi_k(x)=\begin{cases}\sqrt{2}\cos k\pi x & (k=1, 2, \cdots); \\ 1 & (k=0)\end{cases}$$

为函数序列．下面，求 $n=2$ 时对称核(4.79)的最小特征值的近似值．

先求 $A_{jk}(j, k=0, 1)$如下：按公式

$$A_{jk}=\int_0^1\int_0^1 K(x, s)\psi_j(x)\overline{\psi_k(s)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s$$

可计算得

$$A_{00}=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x s\,\mathrm{d}s+\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 x\,\mathrm{d}s=\frac{1}{3},$$

$$A_{01}=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \sqrt{2}s\cos\pi s\,\mathrm{d}s+\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 \sqrt{2}x\cos\pi s\,\mathrm{d}s$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{\pi^2},$$

$$A_{10}=A_{01}=-\frac{\sqrt{2}}{\pi^2},$$

$$A_{11}=2\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x s\cos\pi x\cos\pi s\,\mathrm{d}s+2\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 x\cos\pi x\cos\pi s\,\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x s[\cos\pi(x-s)+\cos\pi(x+s)]\mathrm{d}s$$

$$+\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_x^1[\cos\pi(x-s)+\cos\pi(x+s)]\,\mathrm{d}s=\frac{1}{\pi^2}.$$

于是，求 $n=2$ 时最小特征值的近似值，归结为在条件 $a_0^2+a_1^2=1$ 下求二次式

$$F=\sum_{j,k=0}^{1}A_{jk}a_ja_k=\frac{1}{3}a_0^2-\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2}a_0a_1+\frac{1}{\pi^2}a_1^2$$

的极大值. 记 σ 为 Lagrange 乘子，则它满足代数方程

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{3}-\sigma & -\frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{\pi^2} & \frac{1}{\pi^2}-\sigma\end{vmatrix}=0,$$

即
$$\sigma^2-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{3}\right)\sigma+\frac{1}{3\pi^2}-\frac{2}{\pi^4}=0.$$

这个代数方程的最大根即为 F 的极大值. 于是

$$F=\sigma_{\max}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{3}+\sqrt{\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{4}{3}-\frac{8}{\pi^2}\right)}\right]$$
$$\approx 0.4.$$

因此，所求的最小特征值的近似值是

$$\lambda_1=\frac{1}{\sigma}=2.5. \tag{4.80}$$

对于核(4.79)，实际上可求出它的最小特征值的精确值为 $\frac{1}{4}\pi^2$. 因之，按上法所求得的最小特征值的近似值与精确值还是很接近的.

2. 用核的迹决定第一特征值

由§4定理4.11知道，对称核 $K(x, s)$ 的 m 次迭核 $K_m(x, s)$ 可展成级数

$$K_m(x, s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(s)}}{\lambda_k^m}. \tag{4.81}$$

我们称积分

$$A_m=\int_a^b K_m(x, x)\,\mathrm{d}x$$

为核 $K(x, s)$ 的 m 次迹. 对称核 $K(x, s)$ 的 m 次迹和它的特征值之间有如下的关系式:

$$A_m=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^m}\quad(m\geqslant 2). \tag{4.82}$$

事实上，由定理 4.11 知道，当 $m\geqslant 3$ 时，级数(4.81)关于变量 x、s 同时绝对收敛和一致收敛，这时令 $s=x$，并逐项求积分，且注意到 $\int_a^b|\varphi_k(x)|^2\mathrm{d}x=1$，即得(4.82)式，当 $m=2$ 时，由于收敛级数 $K_2(x,x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2}$ 是正项级数，应用 Lebesgue 关于正项级数逐项积分的定理，可知(4.82)式也是成立的.

还要指出，对于一般的偶次迭核 $K_{2m}(x,s)$ 的迹，不难计算得出

$$A_{2m}=\int_a^b K_{2m}(x,x)\mathrm{d}x=\int_a^b\int_a^b|K_m(x,t)|^2\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x,$$

它是正值 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^{2m}}$.

假设对称核 $K(x,s)$ 的迹已知，我们来求该核的按绝对值意义的最小特征值.

设最小特征值 λ_1 对应有 p 个线性无关的特征函数，且设 $-\lambda_1$ 也是特征值，它对应有 q 个线性无关的特征函数. 于是，在形如(4.82)的级数中，$K(x,s)$ 的 $2m$ 次迹 A_{2m} 含有 λ_1^{2m} 的项有 $r=p+q$ 个. 这时，将(4.82)式写成

$$A_{2m}=\frac{r}{\lambda_1^{2m}}(1+\varepsilon_m), \tag{4.83}$$

其中 ε_m 表示值

$$\varepsilon_m=\frac{1}{r}\sum_{k=r+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)^{2m}.$$

因为 $|\lambda_k|>|\lambda_1|\ (k>r)$，又设 $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{r+1}}\right)^{2m}$ 在表为 ε_m 的和式中共出现 $r^{(1)}$ 次，于是有

$$\begin{aligned}\varepsilon_m&=\frac{1}{r}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{r+1}}\right)^{2m}\left[r^{(1)}+\sum_{k=r+r^{(1)}+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_k}\right)^{2m}\right]\\&\leqslant\frac{1}{r}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{r+1}}\right)^{2m}\left[r^{(1)}+\sum_{k=r+r^{(1)}+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_k}\right)^{2}\right],\end{aligned}$$

易知上式右端方括号内的项

$$\sum_{k=r+r^{(1)}+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_k}\right)^2 < (\lambda_{r+1})^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}$$

$$\leqslant (\lambda_{r+1})^2\int_a^b |K(x,x)|^2 dx < +\infty,$$

而当 $m\to\infty$ 时，$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{r+1}}\right)^{2m}\to 0$，就得出当 $m\to\infty$ 时，有 $\varepsilon_m\to 0$，回到(4.83)式，就有

$$|\lambda_1| = \lim_{m\to\infty}\sqrt{\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}};\ |\lambda_1| = \lim_{m\to\infty}\sqrt[2m]{\frac{1}{A_{2m}}}. \tag{4.84}$$

从(4.83)式，还可得到以下两个近似式：

$$|\lambda_1| \approx \sqrt{\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}};\ |\lambda_1| \approx \frac{\sqrt[2m]{r}}{\sqrt[2m]{A_{2m}}}. \tag{4.85}$$

若 $q=0$，则从(4.82)式可得出一个给出 λ_1 和它的符号的公式：

$$\lambda_1 = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{\sqrt[2m+1]{A_{2m+1}}}$$

和对应的近似公式

$$\lambda_1 \approx \frac{\sqrt[2m+1]{p}}{\sqrt[2m+1]{A_{2m+1}}}.$$

从(4.83)式又可推得

$$|\lambda_1| = \sqrt[2m]{\frac{r(1+\varepsilon_m)}{A_{2m}}} > \sqrt[2m]{\frac{r}{A_{2m}}},$$

同时注意到 $\varepsilon_m > \varepsilon_{m+1}$，又有

$$\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}} = \lambda_1^2\frac{1+\varepsilon_m}{1+\varepsilon_{m+1}} > \lambda_1^2.$$

这就是说，用(4.85)的第一式作近似式要比真值大；而用第二式作近似式要比真值小，即有不等式

$$\sqrt[2m]{\frac{r}{A_{2m}}} < |\lambda_1| < \sqrt{\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}}. \tag{4.86}$$

例 5 设核

$$K(x,s) = \begin{cases}\frac{1}{2}x(2-s), & (0\leqslant x\leqslant s\leqslant 1);\\ \frac{1}{2}s(2-x), & (1\geqslant x\geqslant s\geqslant 0).\end{cases} \tag{4.87}$$

计算这个核的二次迭核，以决定迹 A_2 和 A_4. 因为 $K(x, s)$ 是对称核，故只须设 $s\leqslant x$ 来求 $K_2(x, s)$：

$$K_2(x, s)=\int_0^1 K(x, t)K(t, s)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^s (2-x)(2-s)t^2\mathrm{d}t+\frac{1}{4}\int_s^x t(2-t)s(2-x)\mathrm{d}t$$

$$+\frac{1}{4}\int_x^1 xs(2-t)^2\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{12}[-s^3(2-x)+s(x^3-6x^2+7x)] \quad (s\leqslant x).$$

根据核的对称性，可将上式中的 x 和 s 的位置互换而得到

$$K_2(x, s)=\frac{1}{12}[-x^3(2-s)+x(s^3-6s^2+7s)] \quad (x\leqslant s).$$

现在来计算积 A_2 和 A_4. 注意到对于对称核，又有

$$A_{2m}=\int_a^b\int_a^b |K_m(x, t)|^2\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x,$$

所以再注意到核(4.87)是实函数，有

$$A_2=\int_0^1\int_0^1 K^2(x, s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s,$$

它又可写成

$$A_2=\iint_\sigma K^2(x, s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s,$$

这里 σ 表示正方形 $0\leqslant x, s\leqslant 1$（见图 4.1）. 引对角线 $x=s$，于是 σ 分成两个三角形 σ_1 和 σ_2，因此

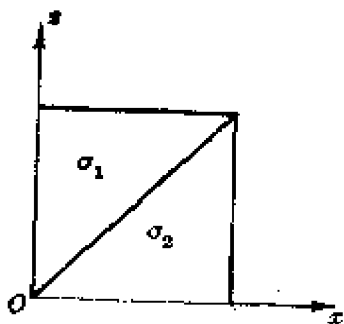


图 4.1

$$A_2=\iint_{\sigma_1} K^2(x, s)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s+\iint_{\sigma_1} K^2(x, s)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s.$$

由于核 $K(x, s)$ 是对称的，故上式右端两个积分相等，于是有

$$A_2=2\iint_{\sigma_2} K^2(x, s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x K^2(x, s)\mathrm{d}s,$$

在一般情形，有

$$A_{2m}=2\int_0^1 dx\int_1^x K_m^2(x,\ s)ds.$$

于是，可求得

$$A_2=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^x s^2(2-x)^2 ds=\frac{11}{180},$$

$$\begin{aligned}A_4&=\frac{1}{72}\int_0^1 dx\int_0^x [-s^3(2-x)+s(x^3-6x^2-7x)]^2 ds\\&=\frac{113}{32400}.\end{aligned}$$

从(4.85)的第二式，令 $m=2$，可以证明 $r=1$，$\lambda_1>0$，故

$$\lambda_1=|\lambda_1|\approx\frac{1}{\sqrt[4]{A_4}}=4.115.$$

这比 Ritz 方法计算出来的值更精确些. 若用(4.85)的第一式，而令 $m=1$，还可得到更好的结果：

$$\lambda_1\approx\sqrt{\frac{A_2}{A_4}}=4.186,$$

且有不等式

$$4.115<\lambda_1<4.186.$$

§6 次一特征值的确定

设对称核 $K(x,\ s)$ 的前 n 个特征值 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\lambda_n$ 及与它们对应的诸特征函数 $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \cdots,\ \varphi_n(x)$ 都是已知的，于是，可以决定次一特征值 λ_{n+1} 及与它对应的特征函数 $\varphi_{n+1}(x)$. 以下面两个定理为基础提供了决定次一特征值的方法.

定理 4.12 设 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n,\ \cdots$ 是核 $K(x,\ s)$ 的一切特征值组成的序列，而 $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \cdots,\ \varphi_n(x),\ \cdots$ 是与之对应的特征函数所成的正交标准系. 则 λ_{n+1} 是核

$$K^{(n)}(x,\ s)=K(x,\ s)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(s)}}{\lambda_k}$$

的按绝对值意义下的最小特征值，而 $\varphi_{n+1}(x)$ 是核 $K^{(n)}(x,\ s)$ 的与 λ_{n+1} 对应的特征函数.

这个定理可从§4引理4.3得出.

据此,求核 $K(x, s)$ 的特征值 λ_{n+1} 相当于对 $K^{(n)}(x,s)$ 求其第一个特征值,于是,就可按§5中所述的 Ritz 方法求出来.

定理 4.13 核 $K(x, s)$ 的特征值 λ_{n+1} 的绝对值的倒数等于积分

$$|(K\varphi, \varphi)| = \left|\int_a^b\int_a^b K(x,s)\varphi(x)\overline{\varphi(s)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\right|$$

的极大值,其中 $\varphi(x)$ 必须满足下列条件:

$$(\varphi, \varphi)=1,\ (\varphi, \varphi_1)=0,\ (\varphi, \varphi_2)=0,\ \cdots,\ (\varphi, \varphi_n)=0.$$

证明 按假设,$\varphi(x)$ 与 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\cdots$, $\varphi_n(x)$ 成正交,故由 Hilbert-Schmidt 公式,有

$$K\varphi = \sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{(\varphi, \varphi_m)}{\lambda_m}\varphi_m(x),$$

这个级数是绝对收敛和一致收敛的,所以乘以 $\overline{\varphi(x)}$ 后,可以逐项求积分

$$(K\varphi, \varphi) = \sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{(\varphi, \varphi_m)}{\lambda_m}(\varphi_m, \varphi) = \sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{(\varphi, \varphi_m)}{\lambda_m}\overline{(\varphi, \varphi_m)}$$

$$= \sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{|(\varphi, \varphi_m)|^2}{\lambda_m}.$$

用绝对值意义下的最小值 λ_{n+1} 代替一切 λ_m,就有

$$|(K\varphi, \varphi)| \leqslant \frac{1}{|\lambda_{n+1}|}\sum_{m=n+1}^{\infty}|(\varphi, \varphi_m)|^2.$$

应用 Bessel 不等式,并注意到 $\|\varphi\|=1$,就有

$$|(K\varphi, \varphi)| \leqslant \frac{\|\varphi\|^2}{|\lambda_{n+1}|} \leqslant \frac{1}{|\lambda_{n+1}|}.$$

又,不难证明,若取 $\varphi(x)=\varphi_{n+1}(x)$,则上式中的不等号即变为等号. 定理证毕.

最后,我们再指出,一个不需应用特征函数而由核的迹直接决定第二个特征值的方法.

设核 $K(x, s)$ 的第一个特征值 λ_1 是已知的,求第二个特征值 λ_2,为讨论简便起见,不妨设 λ_1 与 λ_2 都是单特征值,且 $-\lambda_1$ 和 $-\lambda_2$ 都不是特征值.

写出差

$$
\begin{aligned}
B_{2m} &= A_{2m}^2 - A_{4m} \\
&= \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{2m}}\right]^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{4m}} \\
&= 2\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{2m}\lambda_n^{2m}},
\end{aligned} \tag{4.88}
$$

取m充分大，可使和式(4.88)中的第一项 $\frac{1}{\lambda_1^{2m}\lambda_2^{2m}}$ 大于其它的项，而且其余的项与这项比较皆小到可以略去，从而得到

$$
\frac{1}{\lambda_1^{2m}\lambda_2^{2m}} \approx \frac{B_{2m}}{2}. \tag{4.89}
$$

由此推出下列两个近似公式

$$
|\lambda_2| \approx \frac{1}{|\lambda_1|} \sqrt[2m]{\frac{2}{B_{2m}}}, \quad |\lambda_2| \approx \frac{1}{|\lambda_1|} \sqrt{\frac{B_{2m}}{B_{2m+2}}}. \tag{4.90}
$$

有关近似值与真值的大小比较，以及收敛性等问题的讨论，不会有太大困难，其讨论细节留给读者考虑.

例 6 设核为

$$
K(x, s) = \begin{cases} -\sqrt{xs}\ln s, & (0 \leqslant x \leqslant s \leqslant 1); \\ -\sqrt{xs}\ln x, & (1 \geqslant x \geqslant s \geqslant 0). \end{cases} \tag{4.91}
$$

这时可得 $K_2(x, s) = \frac{\sqrt{xs}}{4}[(x^2+s^2)\ln x + 1 - x^2]$.

于是，可计算得到

$$
A_2 = \int_0^1 K_2(x, x)\,dx = \frac{1}{32};
$$

$$
A_4 = \int_0^1 K_4(x, x)\,dx = \int_0^1 dx \int_0^1 [K_2(x, s)]^2\,ds = \frac{11}{12288},
$$

$$
B_2 = A_2^2 - A_4 = \frac{1}{12288},
$$

由此，有

$$
\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt[4]{A_4}} = 5.78;
$$

$$
\lambda_2 \approx \frac{1}{\lambda_1}\sqrt{\frac{2}{B_2}} = 27.12. \tag{4.92}
$$

§7 可对称化的核·对称积分方程的解

在讨论对称积分方程求解问题之前，先介绍一种可对称化的核.

设核 $K(x, s)$ 有如下形式:

$$K(x, s)=r(s)L(x, s), \tag{4.93}$$

其中 $r(s)\geqslant 0$，且 $L(x, s)$ 是对称的，也即 $L(x, s)=\overline{L(s, x)}$. 这时可以把积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\mathrm{d}s=f(x) \tag{4.94}$$

化为具有对称核的方程. 事实上，将方程(4.94)的两边乘以 $\sqrt{r(x)}$，且记 $\psi(x)=\sqrt{r(x)}\varphi(x)$，并把它看作新的未知函数，于是得到积分方程

$$\psi(x)-\lambda\int_a^b \sqrt{r(x)r(s)}L(x, s)\psi(s)\mathrm{d}s=\sqrt{r(x)}f(x), \tag{4.95}$$

显见，方程(4.95)的核 $\sqrt{r(x)r(s)}L(x, s)$ 是对称的.

这样，具有对称核及可对称化的核的积分方程，都可作为对称积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\mathrm{d}s=f(x) \tag{4.96}$$

以求解，其中核 $K(x, s)$ 是对称的. 设核 $K(x, s)$ 的一切特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$ 及对应的特征函数 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x), \cdots$ 皆为已知. 用 a_n 表示未知函数 $\varphi(x)$ 关于正交标准系 $\{\varphi_n(x)\}$ 的 Fourier 系数:

$$a_n=(\varphi, \varphi_n)=\int_a^b \varphi(x)\overline{\varphi_n(x)}\mathrm{d}x,$$

由 Hilbert-Schmidt 定理，有

$$\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda_n}\varphi_n(x),$$

从而，由方程(4.96)得出

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda_n}\varphi_n(x). \tag{4.97}$$

为了确定其中的 a_n，将(4.97)式的两边乘以 $\overline{\varphi_j(x)}$，且关于 x 从 a 到 b 取积分，并注意到 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$，…，$\varphi_n(x)$，…是一正交标准系，就得到

$$a_j=f_j+\frac{\lambda}{\lambda_j}a_j,\ f_j=(f,\ \varphi_j)\quad (j=1,\ 2,\ \cdots). \tag{4.98}$$

如果 λ 不是方程(4.96)的特征值，即 $\lambda\neq\lambda_j$，于是从(4.98)可解得

$$a_j=\frac{\lambda_j f_j}{\lambda_j-\lambda},$$

代入(4.97)式，就得到积分方程(4.96)的以下形式的解：

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{\lambda_n-\lambda}\varphi_n(x), \tag{4.99}$$

这个级数是绝对收敛和一致收敛的.

如果 λ 是积分方程(4.96)的特征值，且设 $\lambda=\lambda_r=\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_{r'}$，则对于足标 j 异于 r，$r+1$，…，r' 的系数 a_j 也可如上所述的方式确定，而对于 $j=r$，$r+1$，…，r' 中的一个数，必须而且只须 $f_j=0$ 时，(4.98)式才可能有解 a_j，它可以取为任意常数. 换言之，当且仅当积分方程(4.96)的自由项 $f(x)$ 与这特征值所对应的所有特征函数正交时，积分方程(4.96)才有解，这时，解表示为

$$\begin{aligned}\varphi(x)=f(x)&+\lambda\sum_{n=1}^{r-1}\frac{f_n}{\lambda_n-\lambda}\varphi_n(x)+\lambda\sum_{n=r'+1}^{\infty}\frac{f_n}{\lambda_n-\lambda}\varphi_n(x)\\&+C_r\varphi_r(x)+C_{r+1}\varphi_{r+1}(x)+\cdots+C_{r'}\varphi_{r'}(x).\end{aligned} \tag{4.100}$$

公式(4.99)和(4.100)称为 Hilbert-Schmidt 公式.

例 7 解非齐次积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi}K(x,\ s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s=\sin x,$$

其中

$$K(x,\ s)=\begin{cases}\sin x\cos s, & x\leqslant s;\\ \sin s\cos x, & s\leqslant x.\end{cases}$$

由§4中的例3已求出核 $K(x,\ s)$ 的一切特征值和对应的正

交标准特征函数系为

$$\lambda_k=\left(k-\frac{1}{2}\right)^2-1,\quad \varphi_k(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\quad (k=1,\ 2,\ \cdots).$$

计算

$$\begin{aligned}
f_k&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\sin x\,\mathrm{d}x\\
&=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_0^\pi\left[\cos\left(k-\frac{3}{2}\right)x-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right]\mathrm{d}x\\
&=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left[\frac{1}{k-\frac{3}{2}}\sin\left(k-\frac{3}{2}\right)\pi-\frac{1}{k+\frac{1}{2}}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right]\\
&=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{\left(2n-\frac{3}{2}\right)\left(2n+\frac{1}{2}\right)}, & k=2n;\\[2ex] \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{\left(2n-\frac{1}{2}\right)\left(2n+\frac{3}{2}\right)}, & k=2n+1.\end{cases}
\end{aligned}$$

所以应用 Hilbert-Schmidt 公式可求得：

当 $\lambda\neq\lambda_k$ 时，原积分方程的解为

$$\begin{aligned}
\varphi(x)=\sin x+\frac{2\lambda}{\pi}\Bigg[&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n-\frac{1}{2}\right)^2-1-\lambda}\\
&\cdot\frac{1}{\left(2n-\frac{3}{2}\right)\left(2n+\frac{1}{2}\right)}\sin\left(2n-\frac{1}{2}\right)x\\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)^2-1-\lambda}\cdot\frac{1}{\left(2n-\frac{1}{2}\right)\left(2n+\frac{3}{2}\right)}\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)x\Bigg].
\end{aligned}$$

当 $\lambda=\lambda_k$ 时，由于 $f_k\neq 0$，故这时原积分方程无解.

第五章　第一种 Fredholm 型积分方程

本章主要研究第一种 Fredholm 型积分方程的特征值和特征函数的存在性及由核产生的函数展开为特征函数的 Fourier 级数的收敛性定理；积分方程可解的充分必要条件；以及用逐次迫近法求解等问题.

§1　第一种 Fredholm 型积分方程的特征值和特征函数

设 $k(x, y)$ 是实变量 $x, y\in[a, b]$ 的分段连续函数，或至少使下面的重积分

$$\int_a^b\int_a^b |k(x, y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = B$$

取有限值的函数.

进一步还假设

$$\int_a^b |k(x, y)|^2 \mathrm{d}x < M, \quad \int_a^b |k(x, y)|^2 \mathrm{d}y < M,$$

其中 M 是正常数.

我们称

$$f(x) = \int_a^b k(x, y) g(y) \mathrm{d}y \tag{5.1}$$

为第一种 Fredholm 型积分方程，其中 $f(x)$ 是给定的平方绝对可积函数，$g(x)$ 是未知函数. 此外，假设 $k(x, y)$ 一般不是对称核.

容易证明方程(5.1)是可对称化的方程.

事实上，将(5.1)改变变量符号，写成

$$f(y)=\int_a^b k(y,\ t)g(t)\mathrm{d}t,$$

再对两边乘以 $\overline{k(y,\ x)}$，并对 y 取积分，得

$$\int_a^b \overline{k(y,\ x)}\, f(y)\mathrm{d}y=\int_a^b\int_a^b k(y,\ t)\ \overline{k(y,\ x)}\ g(t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$
$$=\int_a^b\left[\int_a^b k(y,\ t)\ \overline{k(y,\ x)}\ \mathrm{d}y\right]g(t)\mathrm{d}t,$$

于是方程(5.1)化为

$$F(x)=\int_a^b K_*(x,\ t)g(t)\mathrm{d}t, \tag{5.2}$$

其中 $$F(x)=\int_a^b \overline{k(y,\ x)}\, f(y)\mathrm{d}y,$$

核 $$K_*(x,\ t)=\int_a^b \overline{k(y,\ x)}\, k(y,\ t)\mathrm{d}y$$

显然是对称的.

为了讨论方程 (5.1) 的可解性条件，E. Schmidt 引进这样的定义：

设对某个实数 $\lambda\neq 0$，存在着不恒为零的函数 $\varphi(x)$和 $\psi(x)$，使得满足以下方程组：

$$\begin{cases}\varphi(x)=\lambda\displaystyle\int_a^b k(x,\ y)\psi(y)\mathrm{d}y;\\ \psi(x)=\lambda\displaystyle\int_a^b \overline{k(y,\ x)}\ \varphi(y)\mathrm{d}y,\end{cases} \tag{5.3}$$

则称 λ 是方程(5.1)或核 $k(x,\ y)$的特征值，$\{\varphi(x),\ \psi(x)\}$ 为与这个特征值 λ 相对应的相伴特征函数对. 这里我们不妨认为特征值都是正的，因为若 λ 是负的，则可取 $-\lambda$ 为特征值，这时只要改变对应的相伴特征函数对为$\{\varphi(x),\ -\psi(x)\}$即可.

特别是，若核 $k(x,\ y)$是对称核，则方程组(5.3)就等价于方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b k(x,\ y)\varphi(y)\mathrm{d}y.$$

应该指出，第一种 Fredholm 方程 (5.1) 的解一般是不存在的，即使存在，也不一定唯一.

例 1 方程

$$e^{2x}=\int_{-\pi}^{\pi}\sin(x+y)\varphi(y)\mathrm{d}y$$

是不可解的．因为，我们可以将方程写成

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(x+y)\varphi(y)\mathrm{d}y=A\sin x+B\cos x,$$

其中 $$A=\int_{-\pi}^{\pi}\cos y\varphi(y)\mathrm{d}y;\qquad B=\int_{-\pi}^{\pi}\sin y\varphi(y)\mathrm{d}y.$$

显然不论 A 与 B 取什么数，均不能使得 $A\sin x+B\cos x=e^{2x}$.

例 2 解方程

$$3\sin x+2\cos x=\int_{-\pi}^{\pi}\sin(x+y)\varphi(y)\mathrm{d}y.$$

我们取下面形式的解

$$\varphi(x)=A\sin x+B\cos x,$$

其中 A 与 B 是待定常数．容易验证，方程的右端等于

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(x+y)\varphi(y)\mathrm{d}y=\pi B\sin x+\pi A\cos x,$$

同方程的左端相比较，得

$$A=\frac{2}{\pi},\qquad B=\frac{3}{\pi},$$

所以方程有特解

$$\varphi_0(x)=\frac{1}{\pi}\left(2\sin x+3\cos x\right).$$

此外，函数

$$\psi(x)=C_0+\sum_{n=2}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

与核 $\sin(x+y)$ 成正交，即恒有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(x+y)\psi(y)\mathrm{d}y=0,$$

这里 C_0, a_n, b_n 都是任意实常数．

所以方程的一般解为

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)+\psi(x).$$

由此可知，对于一般的方程(5.1)，如果它有解 $g(x)$，同时存在某个不恒为零的函数 $\psi(x)$，使得

$$\int_a^b k(x, y)\psi(y)\mathrm{d}y=0,$$

则 $g(x)+\psi(x)$ 也是方程(5.1)的解. 这时, 解自然是不唯一的.

Schmidt 指出, 对于方程(5.1), 存在着一组正特征值 $\{\lambda_i\}$ $(0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3\leqslant\cdots)$ 和对应的正交标准的相伴特征函数对 $\{\varphi_i(x), \psi_i(x)\}$.

证明如下: 首先, 由方程(5.1)的特征值 λ_i 和相伴特征函数对 $\{\varphi_i(x), \psi_i(x)\}$ 满足方程组(5.3), 可以推得 λ_i^2、$\psi_i(x)$ 和 λ_i^2、$\varphi_i(x)$ 分别是对称核

$$K_*(x, y)=\int_a^b \overline{k(t, x)}\ k(t, y)\mathrm{d}t \tag{5.4}$$

和

$$K^*(x, y)=\int_a^b k(x, t)\ \overline{k(y, t)}\,\mathrm{d}t \tag{5.5}$$

在通常意义下的特征值和特征函数.

事实上, 由(5.3)的第一式代入第二式, 就得

$$\begin{aligned}\psi_i(x)&=\lambda_i\int_a^b \overline{k(y, x)}\left[\lambda_i\int_a^b k(y, t)\psi_i(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}y\\&=\lambda_i^2\int_a^b \psi_i(t)\left[\int_a^b \overline{k(y, x)}\,k(y, t)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}t\\&=\lambda_i^2\int_a^b K_*(x, t)\psi_i(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

类似地, 也有

$$\varphi_i(x)=\lambda_i^2\int_a^b K^*(x, t)\varphi_i(t)\mathrm{d}t.$$

因为, 对任意的平方绝对可积的函数 $p(x)$, 恒有

$$\begin{aligned}(K_*p, p)&=\int_a^b\int_a^b K_*(x, y)p(x)\overline{p(y)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_a^b\int_a^b p(x)\overline{p(y)}\left[\int_a^b \overline{k(t, x)}\,k(t, y)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_a^b\left[\int_a^b \overline{k(t, x)}\,p(x)\mathrm{d}x\int_a^b k(t, y)\ \overline{p(y)}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}t\\&=\int_a^b\left|\int_a^b \overline{k(t, x)}\,p(x)\mathrm{d}x\right|^2\mathrm{d}t\geqslant 0,\end{aligned}$$

同样，有 $(K^*p,\ p)\geq 0.$

这时称对称核 $K_*(x,\ y)$（同样，$K^*(x,\ y)$）为**正核**．对于正对称核，它的一切特征值都是正的．

这样一来，可设 λ_i^2 和 $\psi_i(x)$ 为正对称核 $K_*(x,\ y)$ 的一切特征值和正交标准化的特征函数．显然，由第三章知，它们是存在的，作相应的 $\varphi_i(x)$：

$$\varphi_i(x)=\lambda_i\int_a^b k(x,\ y)\psi_i(y)\,\mathrm{d}y, \tag{5.6}$$

容易验证，λ_i^2 和 $\varphi_i(x)$ 是正对称核 $K^*(x,\ y)$ 在通常意义下的特征值和特征函数．

其次，能够证明，这样作出的 $\{\lambda_i^2\}$ 和 $\{\varphi_i(x)\}$ 构成了 $K^*(x,\ y)$ 的特征值和特征函数的完全组．从而，$\{\lambda_i\}$ 和 $\{\varphi_i(x),\ \psi_i(x)\}$ 构成了方程(5.1)的特征值和相伴的特征函数对的完全组．

不妨设 λ_0^2 和 $\varphi_0(x)$ 是对称核 $K^*(x,\ y)$ 的任一特征值和与之对应的特征函数．作 $\psi_0(x)$：

$$\psi_0(x)=\lambda_0\int_a^b\overline{k(y,\ x)}\,\varphi_0(y)\,\mathrm{d}y,$$

这时有
$$\psi_0(x)=\lambda_0^2\int_a^b K_*(x,\ t)\psi_0(t)\,\mathrm{d}t,$$

即 λ_0^2 和 $\psi_0(x)$ 是对称核 $K_*(x,\ y)$ 的特征值和特征函数．此外

$$\begin{aligned}\varphi_0(x)&=\lambda_0^2\int_a^b K^*(x,\ t)\varphi_0(t)\,\mathrm{d}t\\&=\lambda_0^2\int_a^b\int_a^b k(x,\ y)\ \overline{k(t,\ y)}\ \varphi_0(t)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\\&=\lambda_0\int_a^b k(x,\ y)\psi_0(y)\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

这就是说，核 $K^*(x,\ y)$ 的任一特征值 λ_0^2 和特征函数 $\varphi_0(x)$ 都可通过(5.6)式，由核 $K_*(x,\ y)$ 的特征值 λ_0 和特征函数 $\psi_0(x)$ 来给定．

换言之，由 $\{\psi_i(x)\}$ 和通过(5.6)式给出的 $\{\varphi_i(x)\}$ 构成了方程(5.1)的与特征值 $\{\lambda_i\}$ 对应的相伴特征函数对的完全组．

显然，$\{\varphi_i(x)\}$ 与 $\{\psi_i(x)\}$ 可以认为是正交标准系．

特别是，若核 $k(x,\ y)$ 是退化的，则它的特征值和相伴特征函

数对的个数是有限的. 这是因为: 当 $k(x, y)$ 是退化时, 相应的 $K_*(x, y)$ 和 $K^*(x, y)$ 是通常意义下的退化核, 对于后者, 我们已知只有有限个特征值和线性无关的特征函数, 故 $k(x, y)$ 也只有有限个特征值和相伴特征函数对.

对于退化核情形, 下面给出一个求解方法:

设方程(5.1)的核为退化核

$$k(x, y) = \sum_{p=1}^{n} a_p(x) b_p(y),$$

并不妨认为 $a_p(x)$ 与 $b_p(x)$ 都是线性无关的, 这时方程(5.1)可以写成

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_a^b k(x, y) g(y) \mathrm{d}y \\ &= \sum_{p=1}^{n} a_p(x) \int_a^b b_p(y) g(y) \mathrm{d}y \\ &= \sum_{p=1}^{n} f_p a_p(x), \end{aligned}$$

其中 f_p 是常数. 这就表明自由项 $f(x)$ 仅当取上面的形式时才可解. 特别取所求解为如下形式:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k b_k(x),$$

其中 g_k 是待定常数. 将它代入方程(5.1)中, 得

$$\sum_{p=1}^{n} f_p a_p(x) = \sum_{p=1}^{n} a_p(x) \sum_{k=1}^{n} g_k \int_a^b b_p(y) b_k(y) \mathrm{d}y,$$

记 $\beta_{pk} = \int_a^b b_p(y) b_k(y) \mathrm{d}y$, 由于 $\{a_p(x)\}$ 是线性无关的, 由此可得出决定 g_k 的线性代数方程组为

$$f_p = \sum_{k=1}^{n} \beta_{pk} g_k \quad (p = 1, 2, \cdots, n).$$

又因为 $\{b_k(y)\}$ 是线性无关的, 不难证明 $\det(\beta_{pk}) \neq 0$, 由此可以求出 g_k, 最后得到方程的解为 $g(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k b_k(x)$.

例 3 解退化核方程

$$3x^2+4x=\int_{-1}^{1}(6x^2y+4xy^2)g(y)\,dy.$$

显见
$$a_1(x)=6x^2,\ a_2(x)=4x,$$
$$b_1(y)=y,\ b_2(y)=y^2,$$
$$f_1=\frac{1}{2},\ \ f_2=1,$$

又经过计算得：

$$\beta_{11}=\int_{-1}^{1}y^2\,dy=\frac{2}{3},\ \ \beta_{22}=\int_{-1}^{1}y^4\,dy=\frac{2}{5},$$
$$\beta_{12}=\beta_{21}=\int_{-1}^{1}y^3\,dy=0.$$

由此立即求得 $g_1=\frac{3}{4}$，$g_2=\frac{5}{2}$. 于是方程的解是

$$g(x)=\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}x^2.$$

§2 展开定理·Schmidt-Picard 定理

现在先引进由核产生的函数关于特征函数的 Fourier 级数的展开定理，即：

定理 5.1 设$\{\lambda_i\}$是方程 (5.1) 或核 $k(x, y)$ 的一切特征值，$\{\varphi_i(x), \psi_i(x)\}$是与$\{\lambda_i\}$对应的正交标准的相伴特征函数对系，又设 $g(x)$ 是区间$[a, b]$上给定的平方绝对可积函数，且下面的积分有界：

$$\int_a^b|k(x, y)|^2\,dy<M\quad (M\text{ 是正常数}). \tag{5.7}$$

则函数
$$f(x)=\int_a^b k(x, y)g(y)\,dy$$

可展成绝对收敛且一致收敛的级数：

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}f_i\varphi_i(x),\ f_i=\int_a^b f(x)\overline{\varphi_i(x)}\,dx. \tag{5.8}$$

证明 首先应用 Cauchy 不等式，对级数(5.8)的余项进行估计，得

$$\left|\sum_{j=n+1}^{n+p} f_j\varphi_j(x)\right|^2 \leqslant \sum_{j=n+1}^{n+p} \lambda_j^2|f_j|^2 \sum_{j=n+1}^{n+p} \frac{|\varphi_j(x)|^2}{\lambda_j^2}$$

$$\leqslant \sum_{j=n+1}^{n+p} \lambda_j^2|f_j|^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\varphi_j(x)|^2}{\lambda_j^2},$$

而 $\frac{\varphi_j(x)}{\lambda_j}$ 是 $k(x, y)$ 关于 $\{\overline{\psi_j(y)}\}$ 的 Fourier 系数，这里的 x 看作参数，于是有 Bessel 不等式

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\varphi_j(x)|^2}{\lambda_j^2} \leqslant \int_a^b |k(x, y)|^2 \mathrm{d}y < M$$

成立．从而有

$$\left|\sum_{j=n+1}^{n+p} f_j\varphi_j(x)\right|^2 \leqslant M \sum_{j=n+1}^{n+p} \lambda_j^2|f_j|^2.$$

又注意到

$$f_j = \int_a^b f(x)\overline{\varphi_j(x)}\,\mathrm{d}x = \int_a^b\int_a^b k(x, y)\,\overline{\varphi_j(x)}\,g(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{\lambda_j}\int_a^b \overline{\psi_j(y)}\,g(y)\mathrm{d}y, \qquad (5.9)$$

即 $\lambda_j f_j = \int_a^b g(y)\overline{\psi_j(y)}\,\mathrm{d}y$ 是 $g(x)$ 关于 $\{\psi_j(x)\}$ 的 Fourier 系数．同样应用 Bessel 不等式，可知下面级数是收敛的：

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2|f_j|^2 \leqslant \int_a^b |g(x)|^2 \mathrm{d}y < \infty.$$

因此，对任意小的正数 ε，当 n 与 p 足够大时，有

$$\sum_{j=n+1}^{n+p} \lambda_j^2|f_j|^2 < \frac{\varepsilon}{M},$$

从而
$$\left|\sum_{j=n+1}^{n+p} f_j\varphi_j(x)\right|^2 \leqslant M \sum_{j=n+1}^{n+p} \lambda_j^2|f_j|^2 < M\cdot\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

其次，证明级数(5.8)的和就是 $f(x)$．为此，估计

$$\left\|f(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i\varphi_i(x)\right\|^2$$

$$= \int_a^b \left|\int_a^b k(x, y)g(y)\mathrm{d}y - \sum_{i=1}^{n} f_i\varphi_i(x)\right|^2 \mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b\int_a^b k(x, y)g(y)\mathrm{d}y\int_a^b \overline{k(x, t)g(t)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$

$$-2R_e\sum_{i=1}^{n}\bar{f}_i\int_a^b\int_a^b k(x,\ y)g(y)\ \overline{\varphi_i(x)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\ \sum_{i=1}^{n}|f_i|^2$$

注意到(5.4)式和(5.9)式，又有

$$\left\|f(x)-\sum_{i=1}^{n}f_i\varphi_i(x)\right\|^2=\int_a^b\int_a^b K_*(t,\ y)g(y)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t$$

$$-2R_e\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2+\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2$$

$$=\int_a^b\int_a^b K_*(t,\ y)g(y)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t-\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2. \qquad (5.10)$$

因为 $K_*(x,\ y)$ 是对称核，且

$$\int_a^b|K_*(x,\ y)|^2\mathrm{d}y=\int_a^b\left|\int_a^b\overline{k(t,\ x)}\,k(t,\ y)\mathrm{d}t\right|^2\mathrm{d}y$$

$$\leqslant\int_a^b\left[\int_a^b|k(t,\ x)|^2\mathrm{d}t\right]\left[\int_a^b|k(t,\ y)|^2\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}y$$

$$<M^2(b-a),$$

于是应用上一章的 Hilbert-Schmidt定理，得

$$\int_a^b K_*(t,\ y)g(y)\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i^2}(g,\ \psi_i)\psi_i(x),$$

且右端级数关于 t 是绝对收敛和一致收敛的，由此，得

$$\int_a^b\int_a^b K_*(t,\ y)g(y)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i^2}|(g,\ \psi_i)|^2.$$

回到(5.10)，并注意到(5.9)，就有

$$\left\|f(x)-\sum_{i=1}^{n}f_i\varphi_i(x)\right\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i^2}|(g,\ \psi_i)|^2$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i^2}|(g,\ \psi_i)|^2,$$

当 $n\to\infty$ 时，上式趋于零．这就证明了 Fourier 级数(5.8)的部分和均值收敛于 $f(x)$，但这个级数又是一致收敛的，因此它也一致收敛于 $f(x)$．定理证毕．

类似地，有下面的：

定理 5.2 设 $\{\lambda_i\}$ 是方程(5.1)的一切特征值，$\{\varphi_i(x),\ \psi_i(x)\}$ 是与 $\{\lambda_i\}$ 对应的正交标准的相伴特征函数对系．又设 $f(x)$ 是给定在区间 $[a,\ b]$ 上的平方绝对可积函数，且下面的积分有界：

$$\int_a^b |k(x, y)|^2 dx < M \quad (M \text{ 是正常数}). \tag{5.11}$$

则函数
$$F(x) = \int_a^b \overline{k(y, x)} f(y) dy$$

可展成绝对收敛且一致收敛的级数:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i \psi_i(x), \quad F_i = \int_a^b F(x) \overline{\psi_i(x)} dx. \tag{5.12}$$

在前面§1中曾指出, 对于任意的函数 $f(x)$, 方程(5.1)的解一般是不存在的. Schmidt 曾指出, 级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 |f_i|^2, \; f_i = (f, \varphi_i)$$

收敛是方程(5.1)可解的必要条件, 以后 Picard 又指出, 在相伴特征函数对 $\{\varphi_i(x), \psi_i(x)\}$ 中的正交标准系 $\{\varphi_i(x)\}$ 是完备的假设下, 上述条件也是充分的. 后者通常称为 Picard 定理.

定理 5.3(**Schmidt-Picard 定理**) 设$\{\lambda_i\}$和$\{\varphi_i(x), \psi_i(x)\}$是方程(5.1)的所有特征值和相应的正交标准相伴特征函数对系, 又设正交标准系$\{\varphi_i(x)\}$是完备的, 则方程 (5.1) 有解的充分和必要条件是: 级数

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 |f_j|^2, \; f_j = (f, \varphi_j) \tag{5.13}$$

收敛.

证明 若方程(5.1)有解 $g(x) \in L_2[a, b]$, 则有

$$\begin{aligned}\int_a^b g(x) \overline{\psi_i(x)} dx &= \lambda_i \int_a^b g(x) dx \int_a^b k(y, x) \overline{\varphi_i(y)} dy \\ &= \lambda_i \int_a^b \overline{\varphi_i(y)} dy \int_a^b k(y, x) g(x) dx \\ &= \lambda_i \int_a^b f(y) \overline{\varphi_i(y)} dy = \lambda_i f_i,\end{aligned}$$

即 $\lambda_i f_i$ 是函数 $g(x)$ 关于$\{\psi_i(x)\}$ 的 Fourier 系数. 于是由 Bessel 不等式, 级数(5.13)是收敛的, 且有

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 |f_j|^2 \leqslant \int_a^b |g(x)|^2 dx.$$

反之, 若级数(5.13)收敛, 则当 $n \to \infty$ 时, 有

$$\int_a^b \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} \lambda_i f_i \psi_i(x) \right|^2 \mathrm{d}x = \sum_{i=n+1}^{n+p} \lambda_i^2 |f_i|^2 \to 0,$$

于是根据 E. Fischer-F. Riesz 定理，必存在函数 $g(x) \in L_2[a, b]$，使当 $n \to \infty$ 时，

$$\left\| g(x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \psi_i(x) \right\| \to 0, \quad \lambda_i f_i = \int_a^b g(x) \overline{\psi_i(x)} \mathrm{d}x.$$

作函数 $\varphi(x) = f(x) - \int_a^b k(x, y) g(y) \mathrm{d}y,$

如果能证明 $\varphi(x) \equiv 0$，则上面所得出的函数 $g(x)$ 就是方程(5.1)的解．现在证明这一点：显然有

$$(\varphi, \varphi_i) = (f, \varphi_i) - \int_a^b \int_a^b k(x, y) g(y) \overline{\varphi_i(x)} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

$$= f_i - \frac{1}{\lambda_i} \int_a^b g(y) \overline{\psi_i(y)} \mathrm{d}y = 0,$$

即函数 $\varphi(x)$ 同函数系 $\{\varphi_i(x)\}$ 的一切函数成正交，由 $\{\varphi_i(x)\}$ 是完备的假设，即有

$$\varphi(x) \equiv 0.$$

定理证毕．

设给定函数 $f(x) \in L_2[a, b]$，我们说正交标准函数系 $\{\varphi_i(x)\}$ 对 $f(x)$ 是完备的，是指对 $f(x)$ 有 Parseval 等式成立．

对任意函数 $f(x) \in L_2[a, b]$，考虑函数序列

$$g_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \psi_i(x), \ f_i = (f, \varphi_i) \tag{5.14}$$

的收敛性质，这时有下面的 Schmidt-Picard 定理：

定理 5.4 当且仅当正交标准系 $\{\varphi_i(x)\}$ 对于 $f(x)$ 是完备的时，序列 kg_n 均值收敛于 $f(x)$．特别是，若方程(5.1)的解存在，则 kg_n 一致收敛于 $f(x)$．

证明 因为

$$kg_n = \int_a^b k(x, y) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \psi_i(y) \mathrm{d}y$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \int_a^b k(x, y) \psi_i(y) \mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{n} f_i \varphi_i(x),$$

所以 $$\int_a^b |kg_n - f(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_a^b \left| \sum_{i=1}^{n} f_i\varphi_i(x) - f(x) \right|^2 \mathrm{d}x$$
$$= \int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{n} |f_i|^2.$$

由此可见，当且仅当$\{\varphi_i(x)\}$对于$f(x)$是完备的时，即对$f(x)$，有 Parseval 等式

$$\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^2$$

成立时，kg_n 才均值收敛于$f(x)$，这时有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |kg_n - f(x)|^2 \mathrm{d}x = 0.$$

若方程(5.1)有解 $g(x)$，即有

$$f(x) = \int_a^b k(x, y)g(y)\mathrm{d}y,$$

则由展开定理 5.1 可知，kg_n 一致收敛于$f(x)$，即

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i\varphi_i(x).$$

定理证毕.

定理5.5 若方程(5.1)的解 $g(x)$ 存在，则当且仅当 $\{\psi_i(x)\}$ 对于 $g(x)$是完备的时，$g_n(x)$均值收敛于 $g(x)$. 特别是，若 $g(x) = \int_a^b \overline{k(y, x)}\, h(y)\mathrm{d}y$, $h(y)$是某个在 $[a, b]$ 上平方绝对可积的函数，则 $g_n(x)$一致收敛于 $g(x)$.

证明 若方程(5.1)有解 $g(x)$，计算

$$\int_a^b |g_n(x) - g(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_a^b \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\psi_i(x) - g(x) \right|^2 \mathrm{d}x$$
$$= \int_a^b |g(x)|^2 \mathrm{d}x - 2\mathrm{Re} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{f}_i(g, \psi_i)$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 |f_i|^2.$$

注意到当 $$f(x) = \int_a^b k(x, y)g(y)\mathrm{d}y$$

成立时，$f(x)$关于$\{\varphi_i(x)\}$的 Fourier 系数和 $g(x)$ 关于 $\{\psi_i(x)\}$的

Fourier 系数之间有如下关系(即(5.9)式)：

$$f_i=(f,\ \varphi_i)=\frac{1}{\lambda_i}(g,\ \psi_i).$$

因之， $\int_a^b |g_n(x)-g(x)|^2\,\mathrm{d}x=\int_a^b |g(x)|^2\,\mathrm{d}x-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2|f_i|^2.$

由于 $\lambda_i f_i$ 是 $g(x)$ 关于$\{\psi_i(x)\}$的 Fourier 系数，所以当且仅当$\{\psi_i(x)\}$对于 $g(x)$ 是完备的时，即等式

$$\int_a^b |g(x)|^2\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2|f_i|^2$$

成立时，$g_n(x)$ 均值收敛于 $g(x)$，即有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |g_n(x)-g(x)|^2\,\mathrm{d}x=0.$$

特别是，当 $g(x)$ 可写成

$$g(x)=\int_a^b \overline{k(y,\ x)}\,h(y)\,\mathrm{d}y$$

时，由展开定理 5.2, $g(x)$ 可展开成绝对收敛且一致收敛的级数

$$g(x)=\sum_{i=1}^{\infty}(g,\ \psi_i)\psi_i(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i f_i\psi_i(x),$$

即 $g_n(x)$ 一致收敛于 $g(x)$. 定理证毕.

§3　迭核公式·收敛性定理

下面介绍方程(5.2)的一种解法，它类似于第二种积分方程的逐次迫近法.

记
$$K_*g=\int_a^b K_*(x,\ y)g(y)\,\mathrm{d}y,$$

这时方程(5.2)即可写为

$$F(x)=K_*g.$$

再引进算子记号

$$K^r g=\int_a^b\cdots\int_a^b K(x,\ y_r)K(y_r,\ y_{r-1})\cdots K(y_2,\ y_1)g(y_1)\,\mathrm{d}y_r\cdots\mathrm{d}y_1, \tag{5.15}$$

易知有以下的叠核公式成立:

$$K^r(K^s g)=K^{r+s}g. \tag{5.16}$$

取区间$[a, b]$上的平方绝对可积的任意函数 $g_0(x)$ 为方程(5.2)的零次近似,并按以下逐次迫近的公式

$$g_n(x)=g_{n-1}(x)+F(x)-K_* g_{n-1} \tag{5.17}$$

求出 $g_1(x)$, $g_2(x)$, $\cdots$, $g_n(x)$, $\cdots$.

下面利用算子运算,把 $g_n(x)$用 $g_0(x)$、$F(x)$以及 $K_*(x, y)$表示之.

记
$$r_n=g_n-g_{n-1},$$

则有
$$g_n=r_n+g_{n-1}=r_n+r_{n-1}+g_{n-2}=\cdots=\sum_{i=1}^{n} r_i+g_0.$$

由(5.17)式,有

$$r_n=F-K_* g_{n-1},$$

于是,
$$r_n-r_{n-1}=-K_* g_{n-1}+K_* g_{n-2}=-K_*(g_{n-1}-g_{n-2})$$
$$=-K_* r_{n-1},$$

所以
$$r_n=(1-K_*)r_{n-1}=(1-K_*)^2 r_{n-2}=\cdots$$
$$=(1-K_*)^{n-1}r_1,$$
$$r_1=F-K_* g_0.$$

因为算子的乘积满足结合律,且可按多项式乘法相乘,于是就得到

$$\begin{aligned} g_n&=g_0+\sum_{i=1}^{n} r_i=g_0+\sum_{i=1}^{n}(1-K_*)^{i-1}r_1 \\ &=g_0+\sum_{i=1}^{n}(1-K_*)^{i-1}(F-K_* g_0) \\ &=g_0+\left\{\frac{1-(1-K_*)^n}{K_*}\right\}(F-K_* g_0), \end{aligned} \tag{5.18}$$

这里 K_* 可以除尽$[1-(1-K_*)^n]$.

显见,若 $g_n(x)$一致收敛,则它的极限函数 $g(x)$ 就是方程(5.2)的解. 若再附加一些条件,$g(x)$ 也就是方程(5.1)的解. 为此,我们有必要进一步讨论 $g_n(x)$的收敛性,在叙述有关的收敛性的定理之前,先证明几个引理.

不妨假设 $$\int_a^b\int_a^b |k(x,\ y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant 2,$$

对于方程(5.1)，这不是一个实质性的限制，因若

$$\int_a^b\int_a^b |k(x,\ y)|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=B>2,$$

则在方程(5.1)的两边乘以 $\sqrt{\dfrac{2}{B}}$，得到等价的方程

$$\sqrt{\frac{2}{B}}f(x)=\int_a^b\sqrt{\frac{2}{B}}k(x,\ y)g(y)\mathrm{d}y,$$

对于新的核 $$k'(x,\ y)=\sqrt{\frac{2}{B}}k(x,\ y),$$

显然有 $$\int_a^b\int_a^b |k'(x,\ y)|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant\frac{2}{B}\times B=2.$$

对(5.18)中得到的近似解 $g_n(x)$，记

$$F_n(x)=K_*g_n,\qquad f_n(x)=kg_n,\tag{5.19}$$

求出 Fourier 系数

$$\begin{aligned}F_{ni}&=\int_a^b F_n(x)\,\overline{\psi_i(x)}\,\mathrm{d}x=\int_a^b\int_a^b K_*(x,\ y)g_n(y)\overline{\psi_i(x)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_a^b\int_a^b\int_a^b\overline{k(t,\ x)}\,k(t,\ y)g_n(y)\overline{\psi_i(x)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{\lambda_i}\int_a^b\int_a^b k(t,\ y)g_n(y)\overline{\psi_i(t)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

因为 $$f_n(t)=\int_a^b k(t,\ y)g_n(y)\mathrm{d}y,$$

所以，得 $$\begin{aligned}F_{ni}&=\frac{1}{\lambda_i}\int_a^b f_n(t)\,\overline{\varphi_i(t)}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\lambda_i^2}\int_a^b g_n(y)\,\overline{\psi_i(y)}\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

即有

$$F_{ni}=(F_n,\psi_i)=\frac{1}{\lambda_i}(f_n,\ \varphi_i)=\frac{1}{\lambda_i^2}(g_n,\ \psi_i).\tag{5.20}$$

引理 5.1 $F_n(x)$ 和 $f_n(x)$ 都分别能展成绝对收敛且一致收敛的 Fourier 级数：

$$F_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} F_{ni}\psi_i(x), \quad f_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i F_{ni}\varphi_i(x), \qquad (5.21)$$

特别是，若选取

$$g_0(x) = \int_a^b \overline{k(y, x)}\, h(y)\,\mathrm{d}y,$$

$h(y)$是任一平方绝对可积的函数，则 $g_n(x)$ 也能展成绝对收敛且一致收敛的 Fourier 级数：

$$g_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 F_{ni}\psi_i(x). \qquad (5.22)$$

证明 直接应用展开定理，并注意到上面 Fourier 系数的计算结果，有

$$f_n(x) = \int_a^b k(x, y) g_n(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i F_{ni}\varphi_i(x),$$

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \int_a^b K_*(x, y) g_n(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_a^b\int_a^b \overline{k(t, x)}\, k(t, y) g_n(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_a^b \overline{k(t, x)}\, f_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i F_{ni} \int_a^b \overline{k(t, x)}\, \varphi_i(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} F_{ni}\psi_i(x), \end{aligned}$$

同时，当

$$g_0(x) = \int_a^b \overline{k(y, x)}\, h(y)\,\mathrm{d}y$$

时，有

$$\begin{aligned} g_1(x) = g_0(x) + F(x) - K_* g_0 &= \int_a^b \overline{k(y, x)}\, h(y)\,\mathrm{d}y \\ &\quad + \int_a^b \overline{k(y, x)}\, f(y)\,\mathrm{d}y - \int_a^b\int_a^b \overline{k(t, x)}\, k(t, y) g_0(y)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \\ &= \int_a^b \overline{k(y, x)}\, [h(y) + f(y) - f_0(y)]\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

其中

$$f_0(x) = \int_a^b k(x, y) g_0(y)\,\mathrm{d}y.$$

于是由展开定理 5.2, $g_1(x)$ 可以展成绝对收敛且一致收敛的级数. 依此类推, 可得 $g_n(x)$ 都可展成绝对收敛且一致收敛的级数:

$$g_n(x)=\sum_{i=1}^{\infty}(g_n, \psi_i)\psi_i(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2 F_{ni}\psi_i(x).$$

引理 5.2 系数 F_{ni} 和 F_i 之间有如下关系:

$$F_{ni}-F_i=\mu_i^n(F_{0i}-F_i), \quad F_i=(F, \psi_i),$$

这里
$$\mu_i=1-\frac{1}{\lambda_i^2},$$

它适合
$$|\mu_i|<1, \quad \mu_{i+1}\geqslant\mu_i, \quad \lim_{i\to\infty}\mu_i=1.$$

证明 由(5.17)式, 有

$$\begin{aligned}(g_n, \psi_i)&=(g_{n-1}, \psi_i)+(F, \psi_i)-(K_*g_{n-1}, \psi_i)\\&=(g_{n-1}, \psi_i)+(F, \psi_i)-(g_{n-1}, K_*\psi_i)\\&=\left(1-\frac{1}{\lambda_i^2}\right)(g_{n-1}, \psi_i)+(F, \psi_i).\end{aligned}$$

依次类推, 有

$$\begin{aligned}(g_n, \psi_i)&=(F, \psi_i)+\mu_i(g_{n-1}, \psi_i)\\&=(F, \psi_i)+\mu_i[(F, \psi_i)+\mu_i(g_{n-2}, \psi_i)]\\&=(1+\mu_i)(F, \psi_i)+\mu_i^2(g_{n-2}, \psi_i)=\cdots\\&=(1+\mu_i+\mu_i^2+\cdots+\mu_i^{n-1})(F, \psi_i)+\mu_i^n(g_0, \psi_i),\end{aligned}$$

即有
$$\begin{aligned}(g_n, \psi_i)&=\frac{1-\mu_i^n}{1-\mu_i}(F, \psi_i)+\mu_i^n(g_0, \psi_i)\\&=\lambda_i^2(1-\mu_i^n)(F, \psi_i)+\mu_i^n(g_0, \psi_i),\end{aligned}$$

两边用 λ_i^2 除之, 并注意到 $(g_n, \psi_i)=\lambda_i^2 F_{ni}$, 可得

$$F_{ni}=(1-\mu_i^n)F_i+\mu_i^n F_{0i},$$

或
$$F_{ni}-F_i=\mu_i^n(F_{0i}-F_i).$$

因为
$$\frac{1}{\lambda_i^2}\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j^2}\leqslant\int_a^b\int_a^b|k(x, y)|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant2,$$

所以
$$0<\frac{1}{\lambda_i^2}<2, \quad -1<\mu_i<1-\frac{1}{\lambda_i^2}<1,$$

即有
$$|\mu_i|<1.$$

此外, 由于 $\lambda_i\leqslant\lambda_{i+1}$, 且 $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty$, 又有

$$\mu_i = 1-\frac{1}{\lambda_i^2} \leqslant 1-\frac{1}{\lambda_{i+1}^2} = \mu_{i+1}$$

和
$$\lim_{i\to\infty}\mu_i = \lim_{i\to\infty}\left(1-\frac{1}{\lambda_i^2}\right) = 1.$$

引理5.3 等式

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|F_{ni}-F_i|^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2|F_{ni}-F_i|^2 = 0$$

成立。若方程(5.1)的解存在，则又有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^4|F_{ni}-F_i|^2 = 0.$$

证明 将

$$F_0(x)-F(x) = K_* g_0 - \int_a^b \overline{k(y,\ x)}\, f(y)\,\mathrm{d}y$$

展成关于$\{\psi_i(x)\}$的 Fourier 级数，则按 Bessel 不等式，有

$$\sum_{i=1}^{\infty}|F_{0i}-F_i|^2 \leqslant \int_a^b |F_0(x)-F(x)|^2\mathrm{d}x.$$

函数
$$f_0(x)-f(x) = kg_0 - f(x)$$

关于$\{\varphi_i(x)\}$的 Fourier 级数也符合 Bessel 不等式：

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2|F_{0i}-F_i|^2 \leqslant \int_a^b |f_0(x)-f(x)|^2\mathrm{d}x.$$

由此知，级数
$$\sum_{i=1}^{\infty}|F_{ni}-F_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\mu_i^{2n}|F_{0i}-F_i|^2$$

和
$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2|F_{ni}-F_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2\mu_i^{2n}|F_{0i}-F_i|^2$$

关于n是一致收敛的，故极限号可通过和号而得到

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|F_{ni}-F_i|^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i^{2n}|F_{0i}-F_i|^2$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\mu_i^{2n}|F_{0i}-F_i|^2 = 0$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2|F_{ni}-F_i|^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2\mu_i^{2n}|F_{0i}-F_i|^2$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\lambda_i^2\mu_i^{2n}|F_{0i}-F_i|^2 = 0.$$

若方程(5.1)的解存在，则也有 Bessel 不等式

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^4|F_{0i}-F_i|^2\leqslant\int_a^b|g_0(x)-g(x)|^2\mathrm{d}x$$

成立．进而，同样可推得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^4|F_{ni}-F_i|^2=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^4\mu_i^{2n}|F_{0i}-F_i|^2=0.$$

利用上面的引理可证明以下的收敛性定理：

定理 5.6 *序列 K_*g_n 一致收敛于 $F(x)$.*

证明 由引理 5.1 知，$K_*g_n=F_n(x)$ 可展成绝对收敛且一致收敛的 Fourier 级数：

$$K_*g_n=\sum_{i=1}^{\infty}F_{ni}\psi_i(x),$$

又由展开定理 5.2，$F(x)=\int_a^b\overline{k(y,x)}f(y)\mathrm{d}y$ 可展成绝对收敛且一致收敛的 Fourier 级数

$$F(x)=\sum_{i=1}^{\infty}F_i\psi_i(x),\tag{5.23}$$

所以作差 $K_*g_n-F(x)$，并注意到引理 5.2，有

$$K_*g_n-F(x)=\sum_{i=1}^{\infty}(F_{ni}-F_i)\psi_i(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i^n(F_{0i}-F_i)\psi_i(x),$$

而级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}(F_{0i}-F_i)\psi_i(x)\tag{5.24}$$

是绝对收敛且一致收敛的．另外，由于 μ_i 适合引理 5.2 的条件，从而有

$$|\mu_i^n(F_{0i}-F_i)\psi_i(x)|\leqslant|(F_{0i}-F_i)\psi_i(x)|$$

或级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i^n(F_{0i}-F_i)\psi_i(x)$$

绝对收敛且一致收敛，同时关于 n 是均匀地成立．从而不难知道

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i^n(F_{0i}-F_i)\psi_i(x)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\mu_i^n(F_{0i}-F_i)\psi_i(x)=0,$$

即证得 $\qquad K_* g_n - F(x) = \sum_{i=1}^{\infty}(F_{ni} - F_i)\psi_i(x)$

绝对收敛且一致收敛. 换言之, $K_* g_n$ 绝对收敛且一致收敛于 $F(x)$.

定理 5.7 当且仅当正交标准系 $\{\varphi_i(x)\}$ 对于 $f(x)$ 是完备的时, kg_n 均值收敛于 $f(x)$. 特别是, 若方程(5.1)可解, 则 kg_n 一致收敛于 $f(x)$.

证明 由引理 5.1 知, $kg_n = f_n(x)$ 可展成绝对收敛且一致收敛的 Fourier 级数

$$kg_n = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i F_{ni} \varphi_i(x),$$

而 $f(x)$ 关于 $\{\varphi_i(x)\}$ 的 Fourier 级数

$$f(x) \sim \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i F_i \varphi_i(x).$$

考察

$$\int_a^b |kg_n - f(x)|^2 \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 |F_{ni} - F_i|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 |F_i|^2 + \int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x,$$

由 Bessel 不等式知

$$\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 |F_i|^2 \geqslant 0,$$

又由引理 5.3, 有

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 |F_{ni} - F_i|^2 = 0,$$

故 kg_n 均值收敛于 $f(x)$ 的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 |F_i|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x,$$

即正交标准系 $\{\varphi_i(x)\}$ 对于 $f(x)$ 是完备的.

若方程(5.1)有解 $g(x)$, 则级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i F_i \varphi_i(x)$$

绝对收敛且一致收敛于 $f(x)$, 因此, $kg_n - f(x)$ 可展成绝对收敛且

一致收敛的级数:

$$kg_n - f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (F_{ni} - F_i) \varphi_i(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \mu_i^n (F_{0i} - F_i) \varphi_i(x), \qquad (5.25)$$

而级数
$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (F_{0i} - F_i) \varphi_i(x)$$

绝对收敛且一致收敛. 故由 $|\mu_i| < 1$ 知, 级数(5.25)绝对收敛且一致收敛, 关于 n 是均匀地成立, 于是

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{i0} \mu_i^n (F_{0i} - F_i) \varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \lambda_{i0} \mu_i^n (F_{0i} - F_i) \varphi_i(x) \equiv 0,$$

即证得 kg_n 一致收敛于 $f(x)$.

定理5.8 若方程(5.1)的解 $g(x)$ 存在, 则当且仅当 $\{\psi_i(x)\}$ 对于 $g(x)$ 是完备的时, $g_n(x)$ 均值收敛于 $g(x)$. 特别是, 若 $g(x)$ 还可表示成

$$g(x) = \int_a^b \overline{k(y, x)} h(y) \mathrm{d}y,$$

其中 $h(y)$ 是任一在区间 $[a, b]$ 上平方绝对可积的函数, 则 $g_n(x)$ 一致收敛于 $g(x)$.

这里要求零次近似取为

$$g_0(x) = \int_a^b \overline{k(y, x)} h_0(y) \mathrm{d}y,$$

$h_0(y)$ 也是任一平方绝对可积的函数.

证明 由引理5.1知, $g_n(x)$ 可展成绝对收敛且一致收敛的 Fourier 级数

$$g_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 F_{ni} \psi_i(x),$$

$g(x)$ 的 Fourier 级数

$$g(x) \sim \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 F_i \psi_i(x),$$

所以

$$\int_a^b |g_n(x) - g(x)|^2 \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^4 |F_{ni} - F_i|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 |F_i|^2$$

$$+\int_a^b |g(x)|^2 dx. \qquad (5.26)$$

由引理 5.3 知

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2|F_{ni}-F_i|^2=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^4\mu_i^{2n}|F_{0i}-F_i|^2=0.$$

又因为在此 Bessel 不等式成立：

$$\int_a^b |g(x)|^2 dx \geqslant \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^4|F_i|^2,$$

故由 (5.26) 式立即可得当且仅当对 $g(x)$ 的 Bessel 不等式变为 Parseval 等式时，即$\{\psi_i(x)\}$对 $g(x)$ 是完备的时，$g_n(x)$ 均值收敛于 $g(x)$：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |g_n(x)-g(x)|^2 dx=0.$$

特别是，若
$$g(x)=\int_a^b \overline{k(y,\ x)}\,h(y)dy,$$

则由展开定理 5.2 知，$g(x)$的 Fourier 级数绝对收敛且一致收敛于 $g(x)$：

$$g(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2 F_i\psi_i(x),$$

从而
$$g_n(x)-g(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2(F_{ni}-F_i)\psi_i(x)$$

绝对收敛且一致收敛．另一方面，$g_n(x)-g(x)$又均值收敛于零，故 $g_n(x)-g(x)$也一致收敛于零．即 $g_n(x)$一致收敛于 $g(x)$.

由于有以上的收敛性定理，故就可以应用逐次迫近法，按近似求解公式(5.17)或(5.18)对方程(5.1)或(5.2)进行求解．

以下再介绍一种解第一种 Fredholm 积分方程的逐次迫近法，即 З. М. Фридман 所建立的一个定理．

在引进这个定理时，要用到"正定核"的概念，这个概念也是同前面所述的收敛性定理中所见到的关于完备的特征函数系的概念密切相关的．现在扼要介绍如下：

设核 $K(x,\ s)$ 是对称核，$q(x)\in L_2[a,\ b]$，由 Hilbert-Schmidt 定理，$\int_a^b K(x,\ s)q(s)ds$ 可以展成绝对收敛且一致收敛的

级数

$$\int_a^b K(x, s)q(s)\mathrm{d}s = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{q_k}{\lambda_k}\varphi_k(x), \tag{5.27}$$

其中 q_k 是函数 $q(x)$ 关于正交标准系 $\{\varphi_k(x)\}$ 的 Fourier 系数. 将上式两端乘以 $\overline{p(x)}$, 并对 x 在 $[a, b]$ 上积分, 则有

$$\int_a^b\int_a^b K(x, s)\overline{p(x)}q(s)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k q_k}{\lambda_k},$$

p_k 是 $p(x)$ 的 Fourier 系数. 特别是, 当任意函数 $p(x) \equiv q(x)$ 时, 有

$$J = \int_a^b\int_a^b K(x, s)\ \overline{p(x)}p(s)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|p_k|^2}{\lambda_k}. \tag{5.28}$$

当 $J \geqslant 0$ 时, 称对应的核 $K(x, s)$ 是正的; 反之, 是负的.

能够证明, 对称核 $K(x, s)$ 为正(负)核的充要条件是: 它的一切特征值是正(负)的.

若对任何不恒等于零的函数 $p(x) \in L_2[a, b]$, $J > 0$, 则称核 $K(x, s)$ 为正定的; 反之, 若 $J < 0$, 则称核 $K(x, s)$ 为负定的.

同样能够证明, 对称正核是正定核的充要条件是: 它的特征函数系是完备的.

以上两个结论, 留给读者自己证明.

现在介绍一个求第一种 Fredholm 方程的近似解方法, 也即下面的定理:

定理 5.9 设核 $k(x, s)$ 是实对称的正定核, $f(x) \in L_2[a, b]$, 且方程

$$\int_a^b k(x, s)g(s)\mathrm{d}s = f(x) \tag{5.29}$$

的解存在, 则由下式

$$g_n(x) = g_{n-1}(x) + \lambda[f(x) - f_{n-1}(x)] \tag{5.30}$$

确定的序列均值收敛于方程(5.29)的解. (5.30) 式中的 $f_{n-1}(x)$ 为

$$f_{n-1}(x) = \int_a^b k(x, s)g_{n-1}(s)\mathrm{d}s,$$

$g_0(x)$ 是任一在 $[a, b]$ 上平方绝对可积的函数, 而

$$0<\lambda<2\lambda_1,$$

这里 λ_1 是核 $k(x, s)$ 的最小特征值.

证明　将等式(5.30)写成

$$g_n(x)=g(x)+u_n(x) \tag{5.31}$$

于是有

$$\begin{aligned} g_n(x)-g_{n-1}(x)&=u_n(x)-u_{n-1}(x) \\ &=\lambda\int_a^b k(x, s)[g(s)-g_{n-1}(s)]\mathrm{d}s \\ &=-\lambda\int_a^b k(x, s)u_{n-1}(s)\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

即有

$$u_n(x)=u_{n-1}(x)-\lambda\int_a^b k(x, s)u_{n-1}(s)\mathrm{d}s. \tag{5.32}$$

在上式两端乘以核 $k(x, s)$ 的特征函数 $\varphi_i(x)$，且对 x 从 a 到 b 积分，得到

$$\alpha_{in}=\alpha_{i,n-1}-\lambda\int_a^b \varphi_i(x)\mathrm{d}x\int_a^b k(x, s)u_{n-1}(s)\mathrm{d}s, \tag{5.33}$$

这里
$$\alpha_{in}=\int_a^b u_n(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x.$$

又由于核 $k(x, s)$ 是对称的，故 $\varphi_i(x)$ 适合方程

$$\varphi_i(x)-\lambda_i\int_a^b k(s, x)\varphi_i(s)\mathrm{d}s=0,$$

所以

$$\begin{aligned} &\int_a^b \varphi_i(x)\mathrm{d}x\int_a^b k(x, s)u_{n-1}(s)\mathrm{d}s \\ &=\int_a^b u_{n-1}(s)\mathrm{d}s\int_a^b k(x, s)\varphi_i(x)\mathrm{d}x \\ &=\frac{1}{\lambda_i}\int_a^b u_{n-1}(s)\varphi_i(s)\mathrm{d}s=\frac{1}{\lambda_i}\alpha_{i,n-1}. \end{aligned}$$

回到(5.33)，又得

$$\alpha_{in}=\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_i}\right)\alpha_{in-1}=\cdots=\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^n\alpha_{i0}. \tag{5.34}$$

因为特征函数系 $\{\varphi_i(x)\}$ 是完备的，所以 Parseval 等式

$$\int_a^b u_n^2(x)\,dx = \sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_{in})^2 \tag{5.35}$$

对一切 $n=0, 1, \cdots$ 均成立，按假设

$$0<\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^2<1, \tag{5.36}$$

从而正项级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_{in})^2=\sum_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^{2n}(\alpha_{i0})^2\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_{i0})^2$$

收敛，且因右端级数与 n 无关，所以对任意的正数 ε，可以找到与 n 无关的 $N_1(\varepsilon)>0$，使得当 $j>N_1(\varepsilon)$ 时，有

$$\sum_{i=j}^{\infty}(\alpha_{in})^2\leqslant\sum_{i=j}^{\infty}(\alpha_{i0})^2<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.37}$$

固定 j，对级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\alpha_{in})^2$ 的前 $j-1$ 项利用不等式(5.36)就可得出：对上面的 $\varepsilon>0$，存在 $N_2(\varepsilon)>0$，使当 $n>N_2(\varepsilon)$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{j-1}(\alpha_{in})^2=\sum_{i=1}^{j-1}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^{2n}(\alpha_{i0})^2<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.38}$$

联系(5.37)和(5.38)两个不等式，回到(5.35)，则得到

$$\int_a^b u_n^2(x)\,dx<\varepsilon.$$

这也就是说，由(5.30)作出的近似解 $g_n(x)$ 均值收敛于方程(5.29)的解.

例 4　解以下第一种 Fredholm 积分方程

$$\int_0^{\pi}k(x, y)\varphi(y)\,dy=x-\frac{x^2}{2\pi},$$

其中

$$k(x, y)=\begin{cases}\sin x\cos y, & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant\pi;\\ \cos x\sin y, & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$$

解　对方程两边陆续微分，得

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\pi}k(x, y)\varphi(y)\,dy=-\sin x\int_0^{x}\sin y\varphi(y)\,dy$$

$$+\cos x\int_x^{\pi}\cos y\varphi(y)\,dy=1-\frac{x}{\pi},$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_0^\pi k(x,\ y)\varphi(y)\mathrm{d}y = -\cos x\int_0^x \sin y\varphi(y)\mathrm{d}y$$

$$-\sin x\int_x^\pi \cos y\varphi(y)\mathrm{d}y - \varphi(x) = -\frac{1}{\pi},$$

回到原方程，即得解

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} - \int_0^\pi k(x,\ y)\varphi(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi} - x + \frac{x^2}{2\pi}.$$

注意到，当 $x=0$ 时

$$\int_0^\pi k(x,\ y)\varphi(y)\mathrm{d}y = 0,$$

当 $x=\pi$ 时
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\pi k(x,\ y)\varphi(y)\mathrm{d}y = 0,$$

所以上面微分后的方程都同原方程等价，且不难验证齐次方程

$$\int_0^\pi k(x,\ y)\varphi(y)\mathrm{d}y = 0$$

仅有零解，故原方程的解也是唯一的.

§4 第一种 Volterra 型积分方程

第一种 Volterra 型积分方程在附加某些条件下，可以化为第二种方程.

考察第一种方程

$$\int_a^x K(x,\ s)\varphi(s)\mathrm{d}s = f(x). \tag{5.39}$$

从方程(5.39)立即可知，预先给定的 $f(x)$ 必须适合条件 $f(a)=0$，对方程(5.39)两边关于 x 求微商，假定 $f'(x)$ 与 $K'_x(x,\ s)$ 均存在，这时有

$$K(x,\ x)\varphi(x) + \int_a^x K'_x(x,\ s)\varphi(s)\mathrm{d}s = f'(x).$$

设 $K(x,\ x)\neq 0$，则以 $K(x,\ x)$ 除上式两边，即得

$$\varphi(x) + \int_a^x \frac{K'_x(x,\ s)}{K(x,\ x)}\varphi(s)\mathrm{d}s = \frac{f'(x)}{K(x,\ x)}. \tag{5.40}$$

不难证明在条件 $f(a)=0$ 下，方程(5.39)和(5.40)是等价的。事实上，由(5.40)，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x K(x,\ s)\varphi(s)\mathrm{d}s=f'(x),$$

因之，

$$\int_a^x K(x,\ s)\varphi(s)\mathrm{d}s=f(x)+C.$$

因为 $f(a)=0$，所以常数 $C=0$，即推得(5.39)式：

$$\int_a^x K(x,\ s)\varphi(s)\mathrm{d}s=f(x).$$

这样一来，就可将第一种 Volterra 方程化为第二种方程求解。

例 5 解以下积分方程

$$\int_0^x \cos a(x-y)\varphi(y)\mathrm{d}y=\sin ax.$$

解 因为 $\sin ax|_{x=0}=0$，故方程等价于

$$\varphi(x)-a\int_0^x \sin a(x-y)\varphi(y)\mathrm{d}y=a\cos ax.$$

要使上述方程有解，必须 $\varphi(0)=a$，再求导一次，又得到原方程的等价形式

$$\varphi'(x)=a^2\int_0^x \cos a(x-y)\varphi(y)\mathrm{d}y-a^2\sin ax=0,$$

即原方程的解 $\varphi(x)\equiv C=$ 常数，但 $\varphi(0)=a$，故

$$\varphi(x)\equiv a.$$

例 6 试证积分方程

$$\int_0^x (x-y)^{\alpha-1}\varphi(y)\mathrm{d}y=x^\beta \quad (\alpha>1,\ \beta\geqslant 0),$$

恒有形如 $\varphi(x)=Cx^{\beta-\alpha}$ 的解，并确定常数因子 C。

解 将 $Cx^{\beta-\alpha}$ 代入方程中的 $\varphi(x)$，就有

$$C\int_0^x (x-y)^{\alpha-1}y^{\beta-\alpha}\mathrm{d}y=x^\beta.$$

令 $y=x\tau$，则又有

$$Cx^\beta\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-\alpha}\mathrm{d}\tau=x^\beta,$$

于是 $C=\left[\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-\alpha}\,\mathrm{d}\tau\right]^{-1}=\dfrac{1}{B(\beta-\alpha+1,\ \alpha)}$，

其中 $B(p,\ q)$ 是 Beta 函数，由这样的常数因子 C 作出的函数 $\varphi(x)=Cx^{\beta-\alpha}$ 必是原方程的解.

§5 Abel 方程

Abel 积分方程是一类特殊形式的第一种 Volterra 方程，由于其核具有弱奇性，可利用特殊函数求积分的方法进行求解. Abel 方程是从下述问题中产生的：

确定一条位于垂直平面上的曲线 L，使它具有下述性质：当有重量的一个质点 A 从曲线上高度为 h 的点沿着这条曲线 L 往下滑（初速为零），滑到曲线 L 的最低点时，所用的时间 T 是高度 h 的已知函数：

$$T=f_0(h).$$

取垂直向上的方向为 y 轴，水平方向为 x 轴，坐标原点位于未知曲线 L 的最低点. 记曲线 L 的方程为 $x=\xi(y)$. 以 l 表示曲线 L 从初始状态 $t=0\,(y=h)$ 的对应点起算的弧长，于是有

$$\mathrm{d}l=-\sqrt{1+[\xi'(y)]^2}\,\mathrm{d}y=-\varphi(y)\mathrm{d}y,\ \varphi(y)=\sqrt{1+[\xi'(y)]^2}.$$

这里取"$-$"号是因为弧长 l 增加时，点的高度 y 减小.

由能量守恒定律知道

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^2=mg(h-y),$$

其中 m 是 A 点的质量，g 是重力加速度. 由上式就得出

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}l}{\sqrt{2g(h-y)}}=-\frac{\varphi(y)}{\sqrt{2g(h-y)}}\mathrm{d}y.$$

当质点 A 下降到最低点时，与 y 对应由 h 变到 0，所以得

$$f_0(h)=T=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^h\frac{\varphi(y)\mathrm{d}y}{\sqrt{h-y}}. \tag{5.41}$$

上述问题就归结为由(5.41)来确定未知函数 $\varphi(y)$.

方程(5.41)是方程

$$\int_0^x (x-y)^{-\alpha}\varphi(y)\,\mathrm{d}y=f(x)\quad (0<\alpha<1)\tag{5.42}$$

在 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时的特殊情形．我们称方程 (5.42) 为 Abel 积分方程，其中 $f(x)$ 是已知函数．

Abel 方程的一般形式是

$$\int_0^x \frac{G(x,\ y)\varphi(y)}{(x-y)^{\alpha}}\mathrm{d}y=f(x)\quad (0<\alpha<1).\tag{5.43}$$

其中 $G(x,y)$ 和 $f(x)$ 都是已知函数．在此假设下，$G(x,y)$、$G'_x(x,y)$ 和 $f'(x)$ 都是连续函数，且 $G(x,\ x)\neq 0$．在方程 (5.43) 的两端各乘以 $(u-x)^{\alpha-1}$，然后再对 x 从 0 到 u 取积分，得到

$$\int_0^u \frac{\mathrm{d}x}{(u-x)^{1-\alpha}}\int_0^x \frac{G(x,\ y)\varphi(y)}{(x-y)^{\alpha}}\mathrm{d}y=f_1(u),$$

其中 $f_1(u)=\int_0^u (u-x)^{\alpha-1}f(x)\,\mathrm{d}x$．在上式左端交换积分的次序，应用 Dirichlet 公式，就得如下的积分方程：

$$\int_0^u H(u,\ y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y=f_1(u),\tag{5.44}$$

其中

$$H(u,\ y)=\int_y^u \frac{G(x,\ y)\,\mathrm{d}x}{(u-x)^{1-\alpha}(x-y)^{\alpha}}.\tag{5.45}$$

现在说明，方程 (5.44) 的核 $H(u,\ y)$ 是连续的，存在连续导数 $H'_u(u,\ y)$，且 $H(u,\ u)\neq 0$．事实上，在 (5.45) 中引进新的积分变量 t 代替 x，即

$$x=\frac{u+y}{2}+\frac{u-y}{2}\cos t,$$

则得

$$H(u,\ y)=\int_0^{\pi} \frac{G\left(\frac{u+y}{2}+\frac{u-y}{2}\cos t,\ y\right)\sin t}{(1+\cos t)^{\alpha}(1-\cos t)^{1-\alpha}}\mathrm{d}t,\tag{5.46}$$

于是由 $G(x,\ y)$ 的连续性可得出 $H(u,\ y)$ 的连续性，由存在连续导数 $G'_x(x,\ y)$ 得到连续导数 $H'_u(u,\ y)$ 存在，且从 (5.46) 式得到

$$H(u, u)=G(u, u)\int_0^{\pi}\frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{(1+\cos t)^{\alpha}(1-\cos t)^{1-\alpha}}, \quad (5.47)$$

对(5.47)式中的积分，引进代换 $1-\cos t=2x$，又得

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{(1+\cos t)^{\alpha}(1-\cos t)^{1-\alpha}}=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}\mathrm{d}x$$
$$=B(1-\alpha, \alpha),$$

其中 $B(p, q)$ 是 Beta 函数，它又可用 Gamma 函数 $\Gamma(p)$ 表示之，即有

$$B(1-\alpha, \alpha)=\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1)}=\frac{\pi}{\sin 2\pi},$$

由此，回到(5.47)式，即得

$$H(u, u)=G(u, u)\frac{\pi}{\sin 2\pi}. \quad (5.48)$$

这样一来，联系假设 $G(u, u)\neq 0$，即可由(5.48)式推知 $H(u, u)\neq 0$. 又，方程(5.44)的右端

$$f_1(u)=\int_0^u f(x)(u-x)^{\alpha-1}\mathrm{d}x=-\int_0^u\frac{1}{\alpha}f(x)\mathrm{d}(u-x)^{\alpha}$$
$$=\frac{f(0)}{\alpha}u^{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\int_0^u(u-x)^{\alpha}f'(x)\mathrm{d}x, \quad (5.49)$$

由此，不难看出函数 $f_1(u)$ 是连续的，$f_1(0)=0$，且存在连续导数 $f_1'(u)$.

综上所述，可以把方程(5.44)化为等价的第二种 Volterra 方程

$$\varphi(u)+\int_0^u\frac{H_u'(u, y)}{H(u, u)}\varphi(y)\mathrm{d}y=g(u) \quad (5.50)$$

来求解，其中

$$g(u)=\frac{1}{H(u, u)}f_1'(u)$$
$$=\frac{1}{H(u, u)}\left[f(0)u^{\alpha-1}+\int_0^u(u-x)^{\alpha-1}f'(x)\mathrm{d}x\right]. \quad (5.51)$$

设积分方程(5.50)的解为 $\varphi(u)$，能够证明，它也就是方程(5.43)的解. 事实上，将 $\varphi(u)$ 代入原方程，且作

$$\omega(x)=f(x)-\int_0^x\frac{G(x,\ y)\varphi(y)}{(x-y)^\alpha}\mathrm{d}y,$$

在两端同乘以$(u-x)^{\alpha-1}$,在$0\leqslant x\leqslant u$内对x积分,且应用Dirichlet公式交换积分次序,由于(5.44),即得

$$\int_0^u\frac{\omega(x)}{(u-x)^{1-\alpha}}\mathrm{d}x=0,$$

将上式两端再乘以$(v-u)^{-\alpha}$,并关于u从0到v取积分,且交换积分次序,从而对任何v有

$$\int_0^v\omega(x)\mathrm{d}x=0,$$

从而即得$\omega(x)\equiv0$.

这样一来,求解一般形式的Abel积分方程(5.43),就可化为等价的第二种Volterra积分方程(5.50)求解了.

特别是,当$G(x,\ y)\equiv1$,由(5.46)式得$H'_u(u,\ y)=0$,于是由(5.50)和(5.48)可立即求得Abel方程(5.43)的解是:

$$\varphi(u)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\int_0^u(u-x)^{\alpha-1}f'(x)\mathrm{d}x+f(0)u^{\alpha-1}\right].\qquad(5.52)$$

现在应用上式(5.52)就可得出方程(5.41)的解为

$$\varphi(u)=\frac{f_0(0)}{\pi}\sqrt{\frac{2g}{u}}+\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\int_0^u\frac{f_0(x)}{\sqrt{u-x}}\mathrm{d}x.\qquad(5.53)$$

求得$\varphi(u)$后,再由

$$\xi'(y)=\sqrt{[\varphi(y)]^2-1}$$

可得

$$x=\int_0^y\sqrt{[\varphi(y)]^2-1}\,\mathrm{d}y.\qquad(5.54)$$

这就是所要求的质点运动的轨迹方程——曲线L的方程.

特别是在弹道运动的情形,由于在同一高度抛射出的物体落地的时间相同,此时有

$$T=f_0(h)\equiv T_0\quad(T_0\text{是常数}).$$

于是

$$\varphi(y)=\frac{T_0}{\pi}\sqrt{\frac{2g}{y}},\quad x=\int_0^y\sqrt{\frac{2gT_0^2}{\pi^2u}-1}\,\mathrm{d}u.\qquad(5.55)$$

这也是等时降落轨道，几何上表示为旋轮线.

此外还可进一步考虑下面推广的 Abel 积分方程

$$\int_{0}^{x}\frac{\varphi(y)\mathrm{d}y}{[p(x)-p(y)]^{\alpha}}=f(x)\quad(0<\alpha<1;\ a\leqslant c<x<b).\quad(5.56)$$

其中 $p(x)$ 是给定的函数，具有连续导数 $p'(x)$. 这时同样有

$$\int_{c}^{u}\frac{p'(x)f(x)\mathrm{d}x}{[p(u)-p(x)]^{1-\alpha}}=\int_{c}^{u}\int_{c}^{x}\frac{p'(x)\varphi(y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{[p(u)-p(x)]^{1-\alpha}[p(x)-p(y)]^{\alpha}}$$

$$=\int_{c}^{u}\varphi(y)\mathrm{d}y\int_{y}^{u}\frac{p'(x)\mathrm{d}x}{[p(u)-p(x)]^{1-\alpha}[p(x)-p(y)]^{\alpha}},\quad(5.57)$$

而

$$\int_{y}^{u}\frac{\mathrm{d}p(x)}{[p(u)-p(x)]^{1-\alpha}[p(x)-p(y)]^{\alpha}}$$

$$=\int_{p(y)}^{p(u)}\frac{\mathrm{d}t}{[p(u)-t]^{1-\alpha}[t-p(y)]^{\alpha}}=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi},$$

所以 $$\int_{c}^{u}\frac{p'(x)f(x)\mathrm{d}x}{[p(u)-p(x)]^{1-\alpha}}=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\int_{c}^{u}\varphi(y)\mathrm{d}y,$$

由此即得推广的 Abel 公式

$$\varphi(u)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_{c}^{u}\frac{p'(x)f(x)\mathrm{d}x}{[p(u)-p(x)]^{1-\alpha}}.\quad(5.58)$$

例 7 解积分方程

$$\int_{0}^{x}\frac{\varphi(y)\mathrm{d}y}{(x^{2}-y^{2})^{\frac{1}{2}}}=x\quad(x>0).\quad(5.59)$$

解 应用(5.58)式，并引进变量变换 $x=u\cos\theta$，不难得到

$$\varphi(u)=\frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_{0}^{u}\frac{2x^{2}\mathrm{d}x}{(u^{2}-x^{2})^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}u^{2}\cos^{2}\theta\,\mathrm{d}\theta=u\quad(5.60)$$

即原方程(5.59)的解

$$\varphi(x)=x.$$

例 8 求积分方程

$$g(x)=x\int_{0}^{x}\frac{\varphi(y)\mathrm{d}y}{(x^{2}-y^{2})^{\frac{1}{2}}}$$

的一般解式. 特别是，当 $g(x)=x^{n}$ 时，求 $\varphi(x)$.

解 应用推广的 Abel 公式(5.58)，可得

$$\varphi(u)=\frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_0^u\frac{2g(x)\,\mathrm{d}x}{(u^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(u\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}g'(u\sin\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

特别是，若 $g(x)=x^n$，有

$$\varphi(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}nu^{n-1}\sin^n\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{2}{\pi}nu^{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}u^{n-1}\dfrac{(n-1)!!}{(n-2)!!}, & \text{当 } n \text{ 为奇正整数时;}\\[2ex] u^{n-1}\dfrac{(n-1)!!}{(n-2)!!}, & \text{当 } n \text{ 为偶正整数时.}\end{cases}$$

第六章　非线性积分方程

在这一章里，研究非线性 Fredholm 积分方程与方程组以及非线性 Volterra 积分方程与方程组的求解．在若干条件下论证了它们的解可以用逐次逼近法构造出来．然后，对这些非线性积分方程和方程组引进一种嵌入方法，它对于数值求解积分方程很有用．

§1　非线性第二种 Fredholm 型积分方程

考虑以下非线性 Fredholm 型第二种积分方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b F(x,\ y,\ \varphi(y))\,dy, \tag{6.1}$$

其中 λ 是参数，$\varphi(x)$ 是变量 $x\in[a,\ b]$ 的未知函数．假设：

1) $f(x)$ 是定义在区间 $[a,\ b]$ 上的已知连续实函数；

2) $F(x,\ y,\ u)$ 是实变量 $x,\ y\in[a,\ b]$ 和实变量 $u\in[p,\ q]$ 的已知连续实函数，它关于变量 u 还满足 Lipschitz 条件

$$|F(x,\ y,\ u_1)-F(x,\ y,\ u_2)|\leqslant K|u_1-u_2|, \tag{6.2}$$

这里 $K>0$ 是常数．上面的 p 和 q 皆是给定的实数．

显然，存在常数 m_1、m_2 和正常数 M，使

$$m_1\leqslant f(x)\leqslant m_2,\quad |F(x,\ y,\ u)|\leqslant M.$$

在此还假设

$$p<m_1\leqslant m_2<q. \tag{6.3}$$

在上述那些假设下，我们要证明，当参数 λ 取得适当小时，非线性积分方程 (6.1) 有唯一的解．这个解可以用逐次迫近法构造出来．

首先按照下列迭代公式作出函数序列$\{\varphi_n(x)\}$:

$$\varphi_0(x)=f(x),$$

$$\varphi_n(x)=f(x)+\lambda\int_a^b F(x,\ y,\ \varphi_{n-1}(y))\mathrm{d}y \quad (n\geqslant 1). \tag{6.4}$$

显然，有 $$p\leqslant\varphi_0(x)\leqslant q.$$

这时，若假设$\varphi_{n-1}(x)$满足$p\leqslant\varphi_{n-1}(x)\leqslant q$，则

$$|\varphi_n(x)-f(x)|\leqslant|\lambda|\int_a^b|F(x,\ y,\ \varphi_{n-1}(y))|\mathrm{d}y$$

$$\leqslant|\lambda|M(b-a),$$

如果选取参数λ适合条件:

$$|\lambda|\leqslant\min\left(\frac{m_1-p}{M(b-a)},\ \frac{q-m_2}{M(b-a)}\right),$$

则对任何正整数n，由关系式(6.4)逐次作出的$\varphi_n(x)$均满足不等式

$$p\leqslant\varphi_n(x)\leqslant q. \tag{6.5}$$

这样，就保证了由迭代关系式(6.4)确实可以从$\varphi_0(x)=f(x)$出发依次作出函数序列$\{\varphi_n(x)\}$来.

现在证明函数序列$\{\varphi_n(x)\}$是收敛的. 为此，注意到

$$\varphi_n(x)=\varphi_0(x)+\sum_{j=1}^{n}[\varphi_j(x)-\varphi_{j-1}(x)],$$

故只要证明级数$\sum\limits_{j=1}^{\infty}[\varphi_j(x)-\varphi_{j-1}(x)]$是收敛的即可. 考察差

$$\varphi_j(x)-\varphi_{j-1}(x)=\lambda\int_a^b[F(x,\ y,\ \varphi_{j-1}(y))$$

$$-F(x,\ y,\ \varphi_{j-2}(y))]\mathrm{d}y,$$

利用假设条件(6.2)，就有

$$|\varphi_j(x)-\varphi_{j-1}(x)|\leqslant K|\lambda|\int_a^b|\varphi_{j-1}(y)-\varphi_{j-2}(y)|\mathrm{d}y. \tag{6.6}$$

因为

$$|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)|\leqslant|\lambda|\int_a^b|F(x,\ y,\ \varphi_0(y))|\mathrm{d}y$$

$$\leqslant|\lambda|M(b-a),$$

所以由不等式(6.6)得

$$|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|\leqslant K|\lambda|\cdot|\lambda|(b-a)M(b-a)$$
$$=KM|\lambda|^2(b-a)^2,$$

依此类推，一般地，利用递推关系式(6.6)，就可得到，对于一切正整数 j，有以下不等式成立：

$$|\varphi_j(x)-\varphi_{j-1}(x)|\leqslant MK^{j-1}|\lambda|^j(b-a)^j.$$

由于级数
$$\sum_{j=1}^{\infty}K^{j-1}|\lambda|^j(b-a)^j$$
当
$$K|\lambda|(b-a)<1 \tag{6.7}$$
时收敛，所以级数
$$\sum_{j=1}^{\infty}[\varphi_j(x)-\varphi_{j-1}(x)]$$
当条件(6.7)满足时绝对收敛和一致收敛. 这样，函数序列$\{\varphi_n(x)\}$也一致收敛，设极限函数为 $\varphi(x)$. 显然，函数 $\varphi(x)$是连续的，而且由于不等式(6.5)，也有
$$p\leqslant\varphi(x)\leqslant q$$
成立. 又，在关系式(6.4)的两端取 $n\to\infty$ 时的极限，就得知上面所得到的极限函数 $\varphi(x)$就是非线性积分方程(6.1)的解.

这样一来，就证明了当参数 λ 的绝对值适当小时，非线性 Fredholm 积分方程(6.1)的解 $\varphi(x)$是存在的，它可利用逐次迫近法构造出来.

在满足条件(6.7)的情况下，积分方程(6.1)的解必定是唯一的. 事实上，若它还有解 $\psi(x)$，则
$$\varphi(x)-\psi(x)=\lambda\int_a^b[F(x,y,\varphi(y))-F(x,y,\psi(y))]\mathrm{d}y,$$
从而由于条件(6.2)，有
$$|\varphi(x)-\psi(x)|\leqslant|\lambda|K\int_a^b|\varphi(y)-\psi(y)|\mathrm{d}y,$$
对上列不等式两边关于 x 由 a 到 b 积分，得到
$$\int_a^b|\varphi(x)-\psi(x)|\mathrm{d}x\leqslant|\lambda|K(b-a)\int_a^b|\varphi(y)-\psi(y)|\mathrm{d}y,$$
由条件(6.7)，就必有

$$\int_a^b |\varphi(y)-\psi(y)|\mathrm{d}x=0,$$

即
$$\varphi(x)=\psi(x),\ x\in[a,\ b].$$

综上所述，就证明了当参数 λ 适合条件

$$|\lambda|<\min\left(\frac{m_1-p}{M(b-a)},\ \frac{q-m_2}{M(b-a)},\ \frac{1}{K(b-a)}\right)$$

时，非线性积分方程(6.1)存在着唯一的解，这个解可由逐次追近法按迭代公式(6.4)而得到.

在应用逐次追近法时，如果解的零次近似 $\varphi_0(x)$ 不取为 $f(x)$，而取满足条件

$$p\leqslant\varphi_0(x)\leqslant q$$

的任意连续函数，上述结论也成立.

现在考虑非线性积分方程(6.1)的如下情形：

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b F(x,\ y,\ \varphi(y))\mathrm{d}y. \tag{6.8}$$

这个方程可能有依赖于参数 λ 的非零解. 我们在第二章中曾指出，在具有非奇异核的线性方程情形，仅当 λ 是特征值时，方程才可能存在非零解. 方程(6.8)所对应于值 λ 的非零解也称为特征函数. 把方程(6.8)写成

$$\int_a^b F(x,\ y,\ \varphi(y))\mathrm{d}y=\mu\varphi(x),$$

于是使得
$$\int_a^b F(x,\ y,\ \varphi(y))\mathrm{d}y=0$$

的函数 $\varphi(x)$ 就是对应于 $\mu=0$ 的特征函数. 如果

$$\int_a^b F(x,\ y,\ 0)\mathrm{d}y=0,$$

则 $\varphi(x)=0$ 是一个与 λ 值无关的特征函数.

例 1 求积分方程

$$\int_0^1 (x+y)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\phi(y)}\,\mathrm{d}y=\phi(x)$$

的近似解. 并求出 $\phi(x)$ 的界.

不难看到，函数 $F(x,\ y,\ u)=(x+y)^{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}}$ 在 $0\leqslant x$、$y\leqslant 1$ 和

$u \geqslant \delta > 0$ 的任何有限范围内满足上述条件. 由于现在不涉及 λ 值的取值问题,所以一般说来,解的唯一性不成立.

显然,函数 $\varphi(x)=0$ 是这方程的解.

现在来考虑由迭代公式

$$\varphi_n(x)=\int_0^1 (x+y)^{\frac{1}{2}}\left[\varphi_{n-1}(y)\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y$$

得出的近似解,我们取零次近似

$$\varphi_0(x)=C>0 \quad (C \text{ 为常数}),$$

它按关系式
$$\int_0^1 C\,\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 (x+y)^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y$$

确定,得到
$$C=\left[\frac{4}{15}\left(2^{\frac{5}{2}}-2\right)\right]^2.$$

于是可得到一次近似

$$\varphi_1(x)=\int_0^1 (x+y)^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y=\frac{2}{3}C^{\frac{1}{2}}\left[(1+x)^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\right].$$

依此类推,可得到 $\varphi_2(x)$ 等等. 在此应指出,近似解序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 都是正函数.

关于 $\varphi(x)$ 的界可以如下确定:

由原方程,得

$$\varphi_{\max}=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\varphi(x)\leqslant\int_0^1 (x+y)^{\frac{1}{2}}\varphi_{\max}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right)\varphi_{\max}^{\frac{1}{2}},$$

所以
$$\varphi_{\max}^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right).$$

于是
$$\varphi(x)\leqslant\int_0^1 (x+y)^{\frac{1}{2}}\varphi_{\max}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}y\leqslant\frac{4}{9}\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right)\left[(1+x)^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\right].$$

类似地有
$$\varphi_{\min}=\min_{0\leqslant x\leqslant 1}\varphi(x)\geqslant\int_0^1 y^{\frac{1}{2}}\varphi_{\min}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\varphi_{\min}^{\frac{1}{2}},$$

所以
$$\varphi_{\min}^{\frac{1}{2}}\geqslant\frac{2}{3}.$$

于是 $\varphi(x) \geqslant \int_0^1 (x+y)^{\frac{1}{2}} \varphi_{\min}^{\frac{1}{2}} \, dy \geqslant \frac{4}{9}\left[(1+x)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right]$.

这样一来，就得到了原方程的解 $\varphi(x)$ 的上界和下界估计：

$$\frac{4}{9}\left[(1+x)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right] \leqslant \varphi(x) \leqslant \frac{4}{9}\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right)\left[(1+x)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right].$$

对于非线性 Fredholm 型第一种积分方程

$$\int_a^b F(x, y, \varphi(y))\,dy = f(x) \tag{6.9}$$

的求解问题要复杂得多，可以说，这是一个还有待于继续深入研究的问题，在这里不予讨论．在此只指出如下一点：如果用关系式

$$\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(x) + \mu\left[\int_a^b F(x, y, \varphi_{n-1}(y))\,dy - f(x)\right]$$

定出函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$，其中 μ 是引进的任意参数，则即使这个序列一致收敛，从而极限函数满足方程(6.9)．但这个解不是唯一的，它依赖于所采用的 μ 值．

§2 非线性 Fredholm 型积分方程组

上节关于非线性积分方程 (6.1) 的论述可以推广到非线性积分方程组

$$\varphi_\alpha(x) = f_\alpha(x) + \lambda \int_a^b F_\alpha(x, y, \varphi_1(y), \cdots, \varphi_l(y))\,dy$$
$$(\alpha = 1, \cdots, l) \tag{6.10}$$

的情形，其中 $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_l(x)$ 是未知函数，$x \in [a, b]$．

假设

1) $f_\alpha(x)$ $(\alpha=1, \cdots, l)$ 都是已知实函数，它们定义在区间 $[a, b]$ 上，而且是连续的；

2) $F_\alpha(x, y, u_1, \cdots, u_l)$ $(\alpha=1, \cdots, l)$ 都是 x、$y \in [a, b]$ 和实变量 u_α: $p_\alpha \leqslant u_\alpha \leqslant q_\alpha (\alpha=1, \cdots, l)$ 的已知实函数，它们是有界且连续的，并且关于变量 $u_1, u_2, \cdots, u_l$ 满足 Lipschitz 条件：

$$|F_\alpha(x, y, u_1^{(1)}, \cdots, u_l^{(1)}) - F_\alpha(x, y, u_1^{(1)}, \cdots, u_l^{(2)})|$$

$$\leqslant K \sum_{j=1}^{l} |u_j^{(1)} - u_j^{(2)}| \quad (\alpha=1, \cdots, l),$$

其中 K 是正常数，p_α 和 $q_\alpha(\alpha=1, \cdots, l)$都是实数，它们都是给定的。

这时，存在常数 $m_1^{(\alpha)}$、$m_2^{(\alpha)}$ 和正常数 M_α $(\alpha=1, \cdots, l)$，使

$$m_1^{(\alpha)} \leqslant f_\alpha(x) \leqslant m_2^{(\alpha)}, \quad |F_\alpha(x, y, u_1, \cdots, u_l)| \leqslant M_\alpha$$
$$(\alpha=1, \cdots, l).$$

我们还假设 $p_\alpha < m_1^{(\alpha)} \leqslant m_2^{(\alpha)} < q_\alpha$ $(\alpha=1, \cdots, l)$.

为了用逐次逼近法解积分方程组(6.10)，我们按下列迭代公式

$$\varphi_\alpha^{(n)}(x) = f_\alpha(x) + \lambda\int_a^b F_\alpha(x, y, \varphi_1^{(n-1)}(y), \cdots, \varphi_l^{(n-1)}(y))\mathrm{d}y$$
$$(\alpha=1, \cdots, l) \tag{6.11}$$

来依次构造 l 个函数序列$\{\varphi_\alpha^{(n)}(x)\}$ $(\alpha=1, \cdots, l)$，作为零次近似$\varphi_\alpha^{(0)}(x)$ $(\alpha=1, \cdots, l)$，可以取满足条件

$$p_\alpha \leqslant \varphi_\alpha^{(0)}(x) \leqslant q_\alpha \ (\alpha=1, \cdots, l)$$

的任意连续函数．一般，我们就取 $\varphi_\alpha^{(0)}(x)=f_\alpha(x)(\alpha=1, \cdots, l)$. 这时，只要参数 λ 的绝对值适当小，也即满足不等式

$$|\lambda| \leqslant \min\left(\frac{m_1^{(\alpha)} - p_\alpha}{M_\alpha(b-a)}, \ \frac{q_\alpha - m_2^{(\alpha)}}{M_\alpha(b-a)}\right),$$

则对所有的正整数 n，恒有

$$p_\alpha \leqslant \varphi_\alpha^{(n)}(x) \leqslant q_\alpha \ (\alpha=1, \cdots, l).$$

这样就保证了由迭代公式(6.11)逐次构造函数$\varphi_\alpha^{(n)}(x)$ $(\alpha=1, \cdots, l)$是可行的.

为了证明函数序列$\{\varphi_\alpha^{(n)}(x)\}$ $(\alpha=1, \cdots, l)$的收敛性，利用 F_α 满足 Lipschitz 条件的假设，有不等式

$$|\varphi_\alpha^{(n)}(x) - \varphi_\alpha^{(n-1)}(x)| \leqslant K|\lambda|\int_a^b \sum_{j=1}^{l} |\varphi_j^{(n-1)}(y) - \varphi_j^{(n-2)}(y)|\mathrm{d}y.$$

因此，如同一个方程的情形一样，可得知，当

$$|\lambda|<\frac{1}{Kl(b-a)}\tag{6.12}$$

时，函数序列 $\{\varphi_\alpha^{(n)}(x)\}$ $(\alpha=1,\cdots,l)$ 都是绝对收敛和一致收敛的，极限函数 $\varphi_\alpha(x)$ $(\alpha=1,\cdots,l)$ 就是原先方程组(6.10)的解.

如同一个方程的情形一样，可以证明，在条件(6.12)下，积分方程组(6.10)的解是唯一的.

总之，对非线性积分方程组(6.10)，在上面所述的假设下，如果 λ 的绝对值适当小，满足

$$|\lambda|<\min\left(\frac{m_1^{(\alpha)}-p_\alpha}{M_\alpha(b-a)},\ \frac{q_\alpha-m_2^{(\alpha)}}{M_\alpha(b-a)},\ \frac{1}{Kl(b-a)}\right),$$

则(6.10)就有唯一的解，它可按迭代公式(6.11)得出.

§3 非线性 Volterra 型积分方程

考虑非线性 Volterra 型第二种积分方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^x F(x,\ y,\ \varphi(y))\mathrm{d}y,\tag{6.13}$$

函数 $f(x)$ 和 $F(x,\ y,\ u)$ 的假设条件同§1中的一样. 我们要证明，当 λ 的绝对值适当小时，积分方程(6.13)有唯一的解.

我们按照下面的迭代公式来构造函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$:

$$\begin{gathered}\varphi_0(x)=f(x),\\ \varphi_n(x)=f(x)+\lambda\int_a^x F(x,\ y,\ \varphi_{n-1}(y))\mathrm{d}y.\end{gathered}\tag{6.14}$$

同§1中所述一样，当参数 λ 适合条件

$$|\lambda|\leqslant\min\left(\frac{m_1-p}{M(b-a)},\ \frac{q-m_2}{M(b-a)}\right)\tag{6.15}$$

时，对一切自然数 n, $\varphi_n(x)$ 均满足不等式

$$p\leqslant\varphi_n(x)\leqslant q.$$

因此就保证了，按迭代公式(6.14)逐次确定出函数 $\varphi_n(x)$ 是可行的.

现在证明函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 的收敛性. 为此只要证明级数

$\sum_{j=1}^{\infty}[\varphi_j(x)-\varphi_{j-1}(x)]$ 是收敛的即可。

由于

$$|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)|=\left|\lambda\int_a^x F(x, y, \varphi_0(y))\mathrm{d}y\right|$$
$$\leqslant|\lambda|M(x-a),$$

所以

$$|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|=\left|\lambda\int_a^x [F(x, y, \varphi_1(y))-F(x, y, \varphi_0(y))]\mathrm{d}y\right|$$
$$\leqslant|\lambda|K\int_a^x|\varphi_1(y)-\varphi_0(y)|\mathrm{d}y$$
$$\leqslant|\lambda|K|\lambda|M\frac{(x-a)^2}{2!}.$$

依次类推，一般，由数学归纳法可证得对于任意正整数 j，有如下估计式：

$$|\varphi_j(x)-\varphi_{j-1}(x)|\leqslant M|\lambda|^jK^{j-1}\frac{(x-a)^j}{j!}.$$

因此，对于任意参数 λ，级数

$$\varphi_0(x)+\sum_{j=1}^{\infty}[\varphi_j(x)-\varphi_{j-1}(x)]$$

在区间 $[a, b]$ 上绝对收敛和一致收敛，其和 $\varphi(x)$ 就是原先积分方程(6.13)的解.

容易证明，积分方程(6.13)的解是唯一的.

这样，我们就证明了，当参数 λ 满足条件 (6.15) 时，非线性 Volterra 积分方程(6.13)存在着唯一的解，它可利用逐次迭代公式(6.14)而得到.

在此我们还应指出，零次近似 $\varphi_0(x)$ 可取满足条件 $p\leqslant\varphi_0(x)\leqslant q$ 的任意连续函数，上述结论依然成立.

例 2 求方程

$$\varphi(x)=x+\lambda\int_0^x\{1+x[\varphi(y)]^2\}\mathrm{d}y$$

的近似解.

取零次近似为

$$\varphi_0(x)=x,$$

于是

$$\varphi_1(x)=x+\lambda\int_0^x(1+xy^3)\mathrm{d}y$$

$$=(1+\lambda)x+\frac{\lambda}{3}x^4;$$

$$\varphi_2(x)=x+\lambda\int_0^x\left\{1+x\left[(1+\lambda)y+\frac{\lambda}{3}y^4\right]^3\right\}\mathrm{d}y$$

$$=(1+\lambda)x+\frac{\lambda}{3}(1+\lambda)^3x^4+\frac{\lambda^2}{9}(1+\lambda)x^7+\frac{\lambda^3}{81}x^{10},$$

等等.

例 3 求解积分方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^x\{1+[\varphi(y)]^2\}\mathrm{d}y.$$

取零次近似

$$\varphi_0(x)=0,$$

于是

$$\varphi_1(x)=\lambda\int_0^x[1+0]\mathrm{d}y=\lambda x,$$

$$\varphi_2(x)=\lambda\int_0^x[1+(\lambda y)^2]\mathrm{d}y=\lambda x+\frac{\lambda^3}{3}x^3,$$

$$\varphi_3(x)=\lambda\int_0^x\left[1+\left(\lambda y+\frac{\lambda^3}{3}y^3\right)^2\right]\mathrm{d}y$$

$$=\lambda x+\frac{\lambda^3}{3}x^3+\frac{2}{3\cdot5}(\lambda x)^5+\frac{1}{7\cdot9}(\lambda x)^7,$$

依次类推.

其实，对本例积分方程可以利用初等方法求出它的一个精确解. 事实上，如果这积分方程有解 $\varphi(x)$，它必须满足条件

$$\varphi(0)=0.$$

对积分方程两端关于 x 求导，得到

$$\varphi'(x)=\lambda\{1+[\varphi(x)]^2\}.$$

于是可得出原积分方程的解为

$$\varphi(x)=\mathrm{tg}\,\lambda x.$$

在这里，利用了条件 $\varphi(0)=0$.

再考虑非线性 Volterra 型第一种积分方程

$$\int_a^x F(x, y, \varphi(y))\mathrm{d}y = f(x), \tag{6.16}$$

其中 $\varphi(x)$ 是 $x\in[a, b]$ 的未知函数，而 $f(x)$ 和 $F(x, y, u)$ 是其变元的已知函数.

显然，要使积分方程(6.16)有解，必须

$$f(a)=0. \tag{6.17}$$

下面，恒假定这条件满足.

假设 $f(x)$ 和 $F(x, y, u)$ 是变量 $a\leqslant x, y\leqslant b, p\leqslant u\leqslant q$ 的已知连续函数，它们分别具有连续的一阶导数和一阶偏导数，这里 p 和 q 是给定的常数. 为使(6.16)确实是关于 $\varphi(x)$ 的积分方程，我们假设 $F'_u(x, y, u)\neq 0$.

对积分方程(6.16)两边关于 x 求导，就得出满足方程 (6.16) 的函数 $\varphi(x)$ 也满足

$$F(x, x, \varphi(x)) + \int_a^x F'_x(x, y, \varphi(y))\mathrm{d}y = f'(x). \tag{6.18}$$

反之，由条件 (6.17)，也容易知道满足方程(6.18)的函数 $\varphi(x)$ 也必满足原先的积分方程(6.16). 这样，在条件(6.17)下，积分方程(6.16) 和方程 (6.18) 两者是等价的. 因此，为了解积分方程(6.16)，只要解积分方程(6.18)就可以了.

现在来求解非线性积分方程(6.18). 为此，我们再进一步假设函数 $f(x)$ 和 $F(x, y, u)$ 关于变量 x 有二阶连续导数和偏导数. 关于 x 对方程(6.18)的两边求导，就得知满足方程(6.18)的函数 $\varphi(x)$ 和它的导数 $\varphi'(x)$ 也满足下面的非线性微分积分方程

$$\begin{aligned}2F'_x(x, x, \varphi(x)) + F'_y(x, x, \varphi(x)) + F'_u(x, x, \varphi(x))\varphi'(x)&\\ + \int_a^x F''_{xx}(x, y, \varphi(y))\mathrm{d}y = f''(x).&\end{aligned} \tag{6.19}$$

由于假设 $F'_u(x, y, u)\neq 0$, $a\leqslant x, y\leqslant b$, $p\leqslant u\leqslant q$，而且方程

$$F(a, a, u_0) = f'(a) \tag{6.20}$$

至少有一个根 u_0, $p\leqslant u_0\leqslant q$，于是非线性微分积分方程 (6.19) 可写为

$$\varphi'(x)=\frac{f''(x)-2F''_x(x,\ x,\ \varphi(x))-F'_u(x,\ x,\ \varphi(x))}{F'_u(x,\ x,\ \varphi(x))}$$

$$-\int_a^x\frac{F''_{xx}(x,\ y,\ \varphi(y))}{F'_u(x,\ x,\ \varphi(x))}\mathrm{d}y. \tag{6.21}$$

对上面两端积分，并记 $\varphi(a)=u_0$，就得出满足积分方程(6.18)的函数 $\varphi(x)$ 也满足积分方程

$$\varphi(x)=u_0+\int_a^x\frac{f''(t)-2F''_x(t,\ t,\ \varphi(t))-F'_u(t,\ t,\ \varphi(t))}{F'_u(t,\ t,\ \varphi(t))}\mathrm{d}t$$

$$-\int_a^x\int_a^t\frac{F''_{xx}(t,\ y,\ \varphi(y))}{F'_u(t,\ t,\ \varphi(t))}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t. \tag{6.22}$$

反之，若有函数 $\varphi(x)$ 满足方程(6.22)，则显然 $\varphi(a)=u_0$，再对它两端关于 x 求导，即得(6.21)．方程(6.21)也即方程(6.19)又等同于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[F(x,\ x,\ \varphi(x))+\int_a^x F'_x(x,\ y,\ \varphi(y))\mathrm{d}y\right]=f''(x),$$

对其两端关于 x 积分，得

$$F(x,\ x,\ \varphi(x))+\int_a^x F'_x(x,\ y,\ \varphi(y))\mathrm{d}y=f'(x)+C,$$

其中 C 是积分常数．注意到关系式(6.20)，得 $C=0$．上式又等同于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_a^x F(x,\ y,\ \varphi(y))\mathrm{d}y\right]=f'(x),$$

再积分，得
$$\int_a^x F(x,\ y,\ \varphi(y))\mathrm{d}y=f(x)+C_1,$$

C_1 是积分常数．利用条件(6.7)，即得 $C_1=0$．这样一来，满足非线性积分方程(6.22)的函数 $\varphi(x)$ 最后终于满足原先的积分方程(6.16)．

综上所述，在一定的假设条件下，关于非线性 Volterra 型第一种积分方程(6.16)的求解可化为与其等价的非线性 Volterra 型第二种积分方程(6.22)的求解．如果再假设函数 $F(x,\ y,\ u)$ 的一阶偏导数和关于 x 的二阶偏导数对变量 u 满足 Lipschitz 条件，则对积分方程(6.22)就可应用逐次迫近法求解．当然，由于积分方程(6.22)中既有单积分，又有重积分，用逐次迫近法求解的论

述过程同本节开头所讲的稍有些不同，但没有实质性的差异．此外，对应于根 u_0，如果量 $x-a$ 适当小，积分方程(6.22)的解是唯一的．按上所述，这个唯一的解当然也是原先积分方程(6.16)的唯一解．

利用上面关于方程(6.16)的求解方法，也可以仿此讨论形如

$$\int_a^x F(x,\ y,\ \varphi(y),\ \varphi'(y))\mathrm{d}y=f(x)$$

的非线性积分微分方程的求解．

前面的一系列结果可以不难推广到非线性 Volterra 积分方程组的情形．

§4 Hammerstein 型非线性积分方程

在不少重要的数学物理问题中所遇到的非线性 Fredholm 积分方程是如下特殊形式的方程：

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\ y)F(y,\ \varphi(y))\mathrm{d}y,$$

其中 $\varphi(x)$ 是未知函数，$f(x)$、$K(x,\ y)$、$F(y,\ u)$ 都是其变元的已知函数．这种类型的方程称为 Hammerstein 型积分方程*)．借助于泛函和拓扑的方法，可对此类积分方程得出若干有趣的结果．由于其论证方法需要其它一些知识，这里就不讨论了．对此感兴趣的读者可参阅[13]，[14]，[15]，[16]，[17]等有关论文．

对 Hammerstein 型积分方程的求解问题，将在下一章中关于应用积分方程研究某类非线性偏微分方程的边值问题的论述中进行讨论．

§5 解非线性积分方程的参数嵌入方法

С. Л. Соболев 为求线性 Fredholm 积分方程的数值解而引进

*) A. Hammerstein, Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen, Acta Math. 54(1930), 117～176.

了一种嵌入方法，这种方法导致了关于解核的一阶微分方程带有初始条件的 Cauchy 问题，后者可利用 Euler 方法求数值解．近几年来，有些学者把这种方法推广到非线性 Fredholm 积分方程和非线性 Volterra 积分方程[18],[19],[20]，也可以把这种方法推广到非线性积分方程组的情形[22],[23]．

考虑非线性 Fredholm 型第二种积分方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b F(x,\ y,\ \varphi(y))dy, \tag{6.1}$$

其中参数 λ 适当小，$\varphi(x)$ 是 $x\in[a,\ b]$ 的未知函数，$f(x)$ 是定义在 $[a,\ b]$ 上的已知函数，而 $F(x,\ y,\ u)$ 是其所有变元的适当光滑的已知函数．按 §1 中所述，积分方程(6.1)的解是唯一存在的，它可由逐次迫近法构作出来．但是，从计算角度考虑，用逐次迫近法来计算积分方程的近似解毕竟是不方便的．在这一节要引进的参数嵌入方法，对求积分方程的数值解较为方便．下面叙述这个方法时，只是着重叙述这个方法的实质，不多顾及对函数 $F(x,\ y,\ u)$ 的光滑性要求．因此，在下面的论证中，总是认为函数 $F(x,\ y,\ u)$ 满足在论证过程中所需要的光滑性条件，使之足以保证在积分号下求微商、求积、交换积分次序等一系列运算都能够顺利进行．

为明确积分方程(6.1)的解对参数 λ 的依赖性，我们把解记为 $\varphi(x;\lambda)$，于是积分方程(6.1)可以写为

$$\varphi(x;\lambda)=f(x)+\lambda\int_a^b F(x,\ y,\ \varphi(y;\lambda))\mathrm{d}y. \tag{6.23}$$

设方程(6.23)有解 $\varphi(x;\lambda)$，对上式两端关于参数 λ 求导，得到等式

$$\varphi'_\lambda(x;\lambda)=\int_a^b F(x,\ y,\ \varphi(y;\lambda))\mathrm{d}y + \lambda\int_a^b F'_u(x,\ y,\ \varphi(y;\lambda))\varphi'_\lambda(y;\lambda)\mathrm{d}y,$$

这里右上角的撇号(′)表示求导．记

$$M(x;\lambda)=\int_a^b F(x,\ y;\ \varphi(y;\lambda))\mathrm{d}y,$$

于是上面的等式可写为

$$\varphi'_\lambda(x;\lambda)=M(x;\lambda)+\lambda\int_a^b F'_u(x,\ y,\ \varphi(y;\lambda))\varphi'_\lambda(y;\lambda)\mathrm{d}y. \quad (6.24)$$

把等式(6.24)看作是关于函数 $\varphi'_\lambda(x;\lambda)$ 的线性 Fredholm 积分方程，它的核是 $F'_u(x,\ y;\ \varphi(y;\lambda))$。以 $\Gamma(x,\ y;\lambda)$ 表示对应于核 $F'_u(x,\ y;\varphi(y\ ;\lambda))$ 的解核，于是线性积分方程(6.24)的解可表为

$$\varphi'_\lambda(x;\lambda)=M(x;\lambda)+\lambda\int_a^b \Gamma(x,\ t;\lambda)M(t;\lambda)\mathrm{d}t. \quad (6.25)$$

当 $\lambda=0$ 时，得

$$\varphi(x;0)=f(x). \quad (6.26)$$

由第二章的论述可知道，线性 Fredholm 积分方程 (6.24)的核 $F'_u(x,\ y,\ \varphi(y;\lambda))$ 和解核 $\Gamma(x,\ y;\lambda)$ 之间满足如下积分关系式：

$$\Gamma(x,\ y;\lambda)=F'_u(x,\ y,\ \varphi(y;\lambda))$$
$$+\lambda\int_a^b F'_u(x,\ t,\ \varphi(t;\lambda))\Gamma(t,\ y;\lambda)\mathrm{d}t. \quad (6.27)$$

对它两端关于 λ 求导，得到

$$\Gamma'_\lambda(x,\ y;\lambda)=\frac{\partial}{\partial\lambda}[F'_u(x,\ y,\ \varphi(y;\lambda))]$$
$$+\int_a^b F'_u(x,\ t,\ \varphi(t;\lambda))\Gamma(t,\ y;\lambda)\mathrm{d}t$$
$$+\lambda\int_a^b \frac{\partial}{\partial\lambda}[F'_u(x,\ t,\ \varphi(t;\lambda))]\Gamma(t,\ y;\lambda)\mathrm{d}t$$
$$+\lambda\int_a^b F'_u(x,\ t,\ \varphi(t;\lambda))\Gamma'_\lambda(t,\ y;\lambda)\mathrm{d}t. \quad (6.28)$$

记

$$N(x,\ y;\lambda)=\frac{\partial}{\partial\lambda}[F'_u(x,\ y,\ \varphi(y;\lambda))]$$
$$+\int_a^b F'_u(x,\ t,\ \varphi(t;\lambda))\Gamma(t,\ y;\lambda)\mathrm{d}t$$
$$+\lambda\int_a^b \frac{\partial}{\partial\lambda}[F'_u(x,\ t,\ \varphi(t;\lambda))]\Gamma(t,\ y;\lambda)\mathrm{d}t,$$

于是，上列关系式(6.28)可写为

$$\Gamma'_\lambda(x, y; \lambda) = N(x, y; \lambda)$$
$$+\lambda\int_a^b F'_u(x, t, \varphi(t; \lambda))\Gamma'_\lambda(t, y; \lambda)dt. \quad (6.29)$$

我们把(6.29)也看成是关于 $\Gamma'_\lambda(x, y; \lambda)$ 的线性 Fredholm 积分方程，它的核也是 $F'_u(x, y, \varphi(y; \lambda))$，于是方程(6.29)的解可写为

$$\Gamma'_\lambda(x, y; \lambda) = N(x, y; \lambda)$$
$$+\lambda\int_a^b \Gamma(x, t; \lambda)N(t, y; \lambda)dt, \quad (6.30)$$

其中 $\Gamma(x, t; \lambda)$ 就是对应于核 $F'_u(x, t, \varphi(t; \lambda))$ 的解核．此外，由关系式(6.27)，显然有

$$\Gamma(x, y; 0) = F'_u(x, y, \varphi(y; 0)),$$

注意到(6.26)，就有

$$\Gamma(x, y; 0) = F'_u(x, y, f(y)). \quad (6.31)$$

这样一来，从非线性积分方程(6.23)出发，通过求导与线性积分方程的求解公式，就导致关于函数 $\varphi(x; \lambda)$ 和 $\Gamma(x, y; \lambda)$ 的微分积分方程组 (6.25) 与 (6.30) 满足初始条件 (6.26) 与 (6.31) 的 Cauchy 问题．由于方程组 (6.25) 与 (6.30) 的右端都包含有 $\varphi(x; \lambda)$ 和 $\Gamma(x, y; \lambda)$，所以它们是非线性耦合微分积分方程组．

反之，如果上述非线性耦合微分积分方程组(6.25) 与 (6.30) 带有初始条件(6.26)与(6.31)的 Cauchy 问题有唯一的解 $\varphi(x; \lambda)$, $\Gamma(x, y; \lambda)$，我们要证明，函数 $\varphi(x; \lambda)$ 就是原先非线性 Fredholm 积分方程(6.25)的解．

为此，我们先证明函数 $\Gamma(x, y; \lambda)$ 满足关系式 (6.27)．事实上，记(6.27)的右端为

$$K(x, y; \lambda) = F'_u(x, y, \varphi(y; \lambda))$$
$$+\lambda\int_a^b F'_u(x, t, \varphi(t; \lambda))\Gamma(t, y; \lambda)dt, \quad (6.32)$$

我们只要证明

$$\Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y; \lambda) \quad (6.33)$$

就可以了．将式(6.32)两端关于 λ 求导，得到

$$K'_\lambda(x, y; \lambda)=\frac{\partial}{\partial\lambda}[F'_u(x, y, \varphi(y; \lambda))]$$
$$+\int_a^b F'_u(x, t, \varphi(t; \lambda))\Gamma(t, y; \lambda)\mathrm{d}t$$
$$+\lambda\int_a^b \frac{\partial}{\partial\lambda}[F'_u(x, t, \varphi(t; \lambda))]\Gamma(t, y; \lambda)\mathrm{d}t$$
$$+\lambda\int_a^b F'_u(x, t, \varphi(t; \lambda))\Gamma'_\lambda(t, y; \lambda)\mathrm{d}t,$$

或者写为

$$K'_\lambda(x, y; \lambda)=N(x, y; \lambda)$$
$$+\lambda\int_a^b F'_u(x, t, \varphi(t; \lambda))\Gamma'_\lambda(t, y; \lambda)\mathrm{d}t. \tag{6.34}$$

在上式右端积分中的 $\Gamma'_\lambda(t, y; \lambda)$ 代以(6.30)式，得到

$$\int_a^b F'_u(x, t, \varphi(t; \lambda))\Gamma'_\lambda(t, y; \lambda)\mathrm{d}t$$
$$=\int_a^b F'_u(x, t, \varphi(t; \lambda))\Big[N(t, y; \lambda)$$
$$+\lambda\int_a^b \Gamma(t, \xi, \lambda)N(\xi, y; \lambda)\mathrm{d}\xi\Big]\mathrm{d}t$$
$$=\int_a^b\Big[F'_u(x, t, \varphi(t; \lambda))$$
$$+\lambda\int_a^b F'_u(x, \xi, \varphi(\xi; \lambda))\Gamma(\xi, t; \lambda)\mathrm{d}\xi\Big]N(t, y; \lambda)\mathrm{d}t.$$

在上式第二项中，交换了积分次序．上式最右端的方括号内的函数按式(6.32)正好就是 $K(x, t; \lambda)$．于是，由(6.34)得到

$$K'_\lambda(x, y; \lambda)=N(x, y; \lambda)+\lambda\int_a^b K(x, t; \lambda)N(t, y; \lambda)\mathrm{d}t.$$

另外，从(6.32)显然有

$$K(x, y; 0)=F'_u(x, y, f(y)).$$

按照唯一性的假设，即得

$$K(x, y; \lambda)=\Gamma(x, y; \lambda).$$

从而关系式(6.33)得证．

现在来证明函数 $\varphi(x; \lambda)$ 满足方程(6.23)．事实上，记(6.23)

的右端为 $\psi(x;\lambda)$，即

$$\psi(x;\lambda)=f(x)+\lambda\int_a^b F(x,\ y,\ \varphi(y;\lambda))\mathrm{d}y, \qquad (6.35)$$

我们要证明 $\qquad \varphi(x;\lambda)=\psi(x;\lambda)$。

将式(6.35)两端关于 λ 求导，得到

$$\psi'_\lambda(x;\ \lambda)=\int_a^b F(x,\ y,\ \varphi(y;\ \lambda))\mathrm{d}y$$
$$+\lambda\int_a^b F'_u(x,\ y,\ \varphi(y;\ \lambda))\varphi'_\lambda(y;\ \lambda)\mathrm{d}y,$$

或者写为

$$\psi'_\lambda(x;\ \lambda)=M(x;\ \lambda)+\lambda\int_a^b F'_u(x,\ y,\ \varphi(y;\lambda))\varphi'_\lambda(y;\ \lambda)\mathrm{d}y. \qquad (6.36)$$

在上式右端第二项积分中的 $\varphi'_\lambda(y;\lambda)$ 代以(6.25)式，得到

$$\int_a^b F'_u(x,\ y,\ \varphi(y;\ \lambda))\varphi'_\lambda(y;\ \lambda)\mathrm{d}y$$
$$=\int_a^b F'_u(x,\ y,\ \varphi(y;\ \lambda))\Big[M(y;\ \lambda)$$
$$+\lambda\int_a^b \Gamma(y,\ t;\ \lambda)M(t;\ \lambda)\mathrm{d}t\Big]\mathrm{d}y$$
$$=\int_a^b\Big[F'_u(x,\ y;\ \varphi(y;\ \lambda))$$
$$+\lambda\int_a^b F'_u(x,\ t,\ \varphi(t;\lambda))\Gamma(t,\ y;\ \lambda)\mathrm{d}t\Big]M(y;\ \lambda)\mathrm{d}y.$$

在上式中又一次交换了积分次序．按照刚才已经证明过的结论(6.33)，上式右端方括号内的函数就是 $\Gamma(x,\ y;\lambda)$，从而由(6.36)式，就得到

$$\psi'_\lambda(x;\ \lambda)=M(x;\ \lambda)+\lambda\int_a^b \Gamma(x,\ y;\ \lambda)M(y;\ \lambda)\mathrm{d}y.$$

又，从(6.35)，有

$$\psi(x;0)=f(x).$$

因之，由唯一性的假设，即得

$$\psi(x;\ \lambda)=\varphi(x;\ \lambda).$$

综上所述，为解非线性 Fredholm 积分方程(6.23)，可以化为解非线性耦合微分积分方程组(6.25)与(6.30)带有初始条件(6.26)与(6.31)的 Cauchy 问题，只要后者有唯一解，两者是等价的.

众所周知，非线性耦合微分积分方程组(6.25)与(6.30)在初始条件(6.26)与(6.31)下的 Cauchy 问题的求解又等价于非线性 Volterra 型积分方程组

$$\varphi(x;\ \lambda)=f(x)+\int_0^\lambda M(x;\ \mu)d\mu \\ +\int_0^\lambda\left[\int_a^b \mu\Gamma(x,\ t;\ \mu)M(t,\ \mu)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\mu, \quad (6.37)$$

$$\Gamma(x,\ y;\ \lambda)=F'_u(x,\ y,\ f(y))+\int_0^\lambda N(x,\ y;\ \mu)\mathrm{d}\mu \\ +\int_0^\lambda\left[\int_a^b \mu\Gamma(x,\ t;\ \mu)N(t,\ y;\ \mu)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\mu \quad (6.38)$$

的求解，若把 $M(x,\ \mu)$ 和 $N(t,\ y;\ \mu)$ 的具体表达式代入，就得到

$$\varphi(x;\ \lambda)=f(x)+\int_0^\lambda\int_a^b F(x,\ y,\ \varphi(y;\ \mu))\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\mu \\ +\int_0^\lambda\left[\int_a^b \mu\Gamma(x,\ t;\ \mu)\int_a^b F(t,\ y,\ \varphi(y;\ \mu))\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\mu,$$

$$\Gamma(x,\ y;\ \lambda)=F'_u(x,\ y,\ f(y))+\int_0^\lambda\left\{\frac{\partial}{\partial\mu}[F'_u(x,\ y,\ \varphi(y;\ \mu))]\right. \\ +\int_a^b F'_u(x,\ t,\ \varphi(t;\ \mu))\Gamma(t,\ y;\ \mu)\mathrm{d}t \\ \left.+\mu\int_a^b\frac{\partial}{\partial\mu}[F'_u(x,\ t,\ \varphi(t;\ \mu))]\Gamma(t,\ y;\ \mu)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}\mu \\ +\int_0^\lambda\left\{\int_a^b \mu\Gamma(x,\ t;\ \mu)\left[\frac{\partial}{\partial\mu}F'_u(t,\ y,\ \varphi(y;\ \mu))\right.\right. \\ +\int_a^b F'_u(t,\ \xi,\ \varphi(\xi;\ \mu))\Gamma(\xi,\ y;\ \mu)\mathrm{d}\xi \\ \left.\left.+\mu\int_a^b\frac{\partial}{\partial\mu}F'_u(t,\ \xi,\ \varphi(\xi;\ \mu))\cdot\Gamma(\xi,\ y;\ \mu)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}\mu.$$

整理一下，方程组(6.37)、(6.38)就可写为

$$\varphi(x;\lambda)=f(x)+\int_0^\lambda\int_a^b F(x,\ y,\ \varphi(y;\mu))\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\mu$$
$$+\int_0^\lambda\int_a^b\int_a^b \mu\Gamma(x,\ t;\mu)F(t,\ y,\ \varphi(y;\mu))\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mu,\tag{6.39}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(x,\ y;\lambda)=&F_u''(x,\ y,\ \varphi(y;\lambda))\\&+\int_0^\lambda\int_a^b F_u'(x,\ t,\ \varphi(t;\mu))\Gamma(t,\ y;\mu)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mu\\&+\int_0^\lambda\int_a^b \mu\frac{\partial}{\partial\mu}[F_u''(x,\ t,\ \varphi(t;\ \mu))]\Gamma(t,\ y;\ \mu)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mu\\&+\int_0^\lambda\int_a^b \mu\Gamma(x,\ t;\ \mu)\frac{\partial}{\partial\mu}[F_u'(t,\ y,\ \varphi(y;\ \mu))]\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mu\\&+\int_0^\lambda\int_a^b\int_a^b \mu\Gamma(x,\ t;\ \mu)F_u'(t,\ \xi,\ \varphi(\xi;\ \mu))\\&\qquad\times\Gamma(\xi,\ y;\mu)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}t\mathrm{d}\mu\\&+\int_0^\lambda\int_a^b\int_a^b \mu^2\Gamma(x,\ t;\ \mu)\frac{\partial}{\partial\mu}[F_u'(t,\ \xi,\ \varphi(\xi;\ \mu))]\\&\qquad\times\Gamma(\xi,\ y;\ \mu)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}\tag{6.40}$$

由上列(6.39)与(6.40)式，就可建立为使非线性耦合微分积分方程组(6.25)与(6.30)在初始条件(6.26)与(6.31)下的 Cauchy 问题存在着唯一解的某些充分条件，这些条件实际上就是对非线性 Fredholm 积分方程(6.23)中的函数 $F(x,\ y,\ u)$ 加上若干光滑性条件．在这些条件下，就可证明非线性 Volterra 型积分方程组(6.39)、(6.40)当 λ 适当小时，存在着唯一的解．至于 $F(x,\ y,\ u)$ 的光滑性条件的具体形式，这里就不讨论了．

乍看起来，研究非线性耦合微分积分方程组(6.25)、(6.30)在初始条件(6.26)、(6.31)下的求解似乎比非线性 Fredholm 积分方程(6.23)的求解复杂得多，但是，前者在求数值解时比后者方便，这正是本节所述的参数嵌入方法的优点．

例 **4** 求非线性积分方程

$$\varphi(x;\ \lambda)=1+\lambda\int_0^1\left\{xy[\varphi(y;\ \lambda)]^2-\frac{x}{2}\right\}\mathrm{d}y$$

的解.

容易验证,这方程的真正解是 $\varphi=1$.

对于 $\lambda=0.1$, 用 Euler 方法解相应的非线性初值问题, 计算得到的解,其精确性在 1% 之内.

第七章 应 用

积分方程能够发展成为数学学科的一个重要分支，位势理论对它的贡献最大. 所以在这一章里论述积分方程理论的应用时，首先叙述位势理论以及有关的发展. 其次介绍积分方程理论在建立解数学物理问题的常用方法之一——分离变量法的理论基础时所起的重要作用，并引进积分方程理论在力学问题中的若干应用例子.

§1 位 势

在研究椭圆型偏微分方程的定解问题时，一种常用的方法是：先选定适当的含有任意函数且在所讨论的区域内满足方程的解的分析表达式，然后确定其所含的函数，使这表达式在区域边界上满足所给的定解条件. 利用位势把定解问题化为解相应的积分方程，就是这样一种方法. 下面就三维 Laplace 方程来叙述这个方法，所得的结果可以推广到一般椭圆型方程，对此感兴趣的读者，可参阅专著[23].

将含有任意函数且在所讨论的区域内满足 Laplace 方程的调和函数用某些特殊形式的曲面积分来表示，然后利用这类曲面积分的境界性质，使曲面积分满足原先的边界条件，得出一个关于待定函数的积分方程. 这类特殊形式的积分，按照力学、物理学中的称呼，叫做位势函数，或简称位势. 这一节引进位势概念并讨论其性质，接着在下面几节中叙述使用位势解 Laplace 方程的内、外 Dirichlet 问题和内、外 Neumann 问题，且讨论 Poisson 方程的相应边值问题的求解. 综合这些，统称为位势理论.

设在空间某点 $M_0(\xi, \eta, \zeta)$ 处放置一个电荷 q_0，根据电学中的定律，这个电荷将产生一个静电场，在任一点 $M(x, y, z)$ 的电场强度是

$$\boldsymbol{E}(M)=Kq_0\frac{\boldsymbol{r}}{r^3},$$

其中 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{M_0M}$，$r=r_{MM_0}=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$；$K$ 是比例常数，在一般情形都可适当选择单位制，使 $K=1$。于是

$$\boldsymbol{E}(M)=q_0\frac{\boldsymbol{r}}{r^3},$$

它的分量是

$$\begin{aligned}
E_x&=E\cos\alpha=\frac{q_0}{r^3}(x-\xi);\\
E_y&=E\cos\beta=\frac{q_0}{r^3}(y-\eta);\\
E_z&=E\cos\gamma=\frac{q_0}{r^3}(z-\zeta),
\end{aligned}\tag{7.1}$$

其中 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 是向量 $\boldsymbol{E}$ 的方向余弦；而 E 是向量 $\boldsymbol{E}$ 的模。

显见，(7.1)式的右端是函数

$$u(M)=\frac{q_0}{r_{MM_0}}$$

分别关于 x、y、z 的偏导数的反号，即

$$E_x=-\frac{\partial u}{\partial x},\quad E_y=-\frac{\partial u}{\partial y},\quad E_z=-\frac{\partial u}{\partial z}.$$

函数 $u(M)$ 称为此静电场的电位。

因为由若干个电荷所产生的电位等于这些点电荷分别所产生的电位的相加，所以由连续分布的电荷所产生的电位可以用和的极限形式来表示，也就是说，可以表示成积分的形式。若电荷是以体密度 $\rho(P)$ 分布在某个体 Ω 内，则在 Ω 外一点 M 的电位是

$$u(M)=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho(P)}{r_{MP}}\mathrm{d}\Omega_P,\tag{7.2}$$

其中 r_{MP} 是点 M 和点 P 之间的距离，$\mathrm{d}\Omega_P$是体积元素。若电荷是

以面密度 $\omega(P)$分布在某个曲面 S 上，则在曲面外一点 M 的电位为

$$u(M)=\iint\limits_{S}\frac{\omega(P)}{r_{MP}}\mathrm{d}S_{P},\qquad(7.3)$$

其中 $\mathrm{d}S_P$ 表示面积元素.

积分 (7.2) 称为体位势；积分 (7.3)称为单层位势.

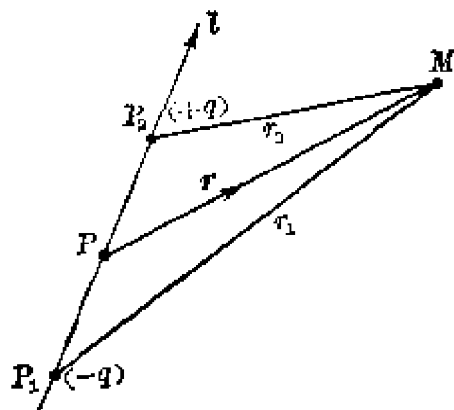


图 7.1

现假设有两个电荷 $-q$ 和 $+q$ 分别放置在点 P_1 和点 P_2 处（图 7.1)，构成一偶极子. 从电荷 $-q$ 到 $+q$ 的向量记为 $\boldsymbol{l}$，$\boldsymbol{l}$ 轴叫做偶极子轴. 设点 P_1 与 P_2 之间的距离为 Δl，记 $N=q\Delta l$，称为偶极矩. 现在来计算由这一偶极子所产生的电位——称为偶极势.

由于偶极子的作用，在任一点 M 的偶极势是

$$u(M)=\frac{q}{r_2}-\frac{q}{r_1}=N\frac{1}{\Delta l}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right),$$

其中 r_1 与 r_2 分别是点 P_1 与 P_2 到点 M 的距离. 如果两个电荷间的距离 Δl 很小，则就可以把上式中所出现的差商近似地用微商来代替，从而得到

$$u(M)=N\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{r}\right),$$

其中 r 是点 P_1 与 P_2 间某点 P 到点 M 的距离，所出现的微商是沿 $\boldsymbol{l}$ 轴方向进行的.

由于 $$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial l}=\frac{1}{r^2}\cos(\boldsymbol{r}_{PM},\ \boldsymbol{l}),$$

所以偶极势又可写成

$$u(M)=N\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM},\ \boldsymbol{l})}{r^2}.$$

现在假设有两个十分邻近的曲面 S 和 S' (图 7.2)，它们之间沿公共法线方向的距离为 $\delta(\delta>0)$是很小的数. 假定在曲面 S 和

S' 上各点分布着电荷，曲面 S' 上各点的电荷在数量上等于曲面 S 上对应点（即具有公共法线的点）的电荷，但符号相反．用 $\boldsymbol{n}$ 表示两个曲面 S 和 S' 的公共法线，其方向是由负电荷指向正电荷．由于 δ 很小，不妨把曲面 S 和 S' 视为相重合．这样就得到一个双层曲面，这个曲面的两侧分布着符号相反的电荷．设

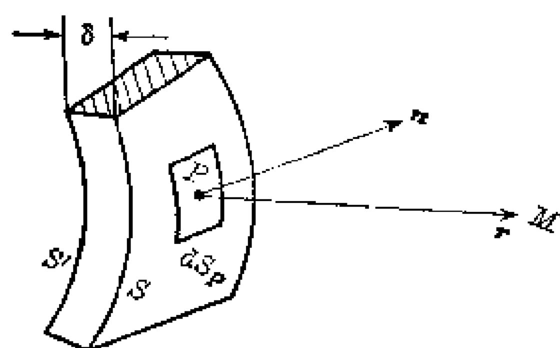


图 7.2

$\nu(P)$ 是此双层曲面上偶极矩的面密度，于是，由于偶极子的这种分布所产生的电位是

$$u(M)=\iint_S \nu(P)\,\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM},\ \boldsymbol{n}_P)}{r_{PM}^2}\,dS_P. \qquad (7.4)$$

积分(7.4)称为**双层位势**．

双层位势和单层位势都称**面位势**，连同体位势又统称为**Newton 位势**，或简称**位势**．

我们知道，点电荷产生的电位 $\dfrac{q_0}{r_{M_0P}}$ 除去点 M_0 外，处处满足 Laplace 方程，偶极势也具有此种性质．因之，利用把微商号移入积分号内的方法，易于推出，面位势(7.3)、(7.4)也应具有同样的性质．也即有下述的定理：

定理 7.1 若密度函数 $\omega(P)$ 和 $\nu(P)$ 都是曲面 S 上的点 P 的连续函数，则单层位势(7.3)和双层位势(7.4)当点 M 不在曲面 S 上时处处是调和函数．

现在假设 S 是分块光滑闭曲面，它所围的内部有界区域记为 D^+；它的外部无界区域记为 D^-．

利用 Green 公式易于得到：对于每个在 $D^+ + S$ 上连续可微、在 D^+ 内有二阶连续偏导数的函数 u，在区域 D^+ 内有下面的表达式成立：

$$u(M) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{D^+}\frac{\Delta u}{r_{PM}}\mathrm{d}\Omega_P + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\frac{1}{r_{PM}}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S_P$$
$$-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S} u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{PM}}\right)\mathrm{d}S_P, \tag{7.5}$$

其中 n 是曲面 S 的外法线；r_{PM} 为点 P 与点 M 间的距离；Δ 是 Laplace 算子. 这就是说，每一个在 $D^+ + S$ 上连续可微、在 D^+ 内有连续二阶偏导数的函数 u，可看作是质量分布的位势，这个位势由三部分组成，即：密度为 $-\frac{1}{4\pi}\Delta u$ 的在体 D^+ 上的空间分布的体位势；密度为 $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial u}{\partial n}$ 的在界面 S 上的曲面分布的单层位势；以及密度为 $-\frac{1}{4\pi}u$ 的在界面 S 上的偶极分布的双层位势. 特别是，当 u 是调和函数，即 $\Delta u = 0$ 时，就有关系式

$$u(M) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\frac{1}{r_{PM}}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S_P - \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{PM}}\right)\mathrm{d}S_P,$$

也就是说，区域 D^+ 内的任何一个在 $D^+ + S$ 上连续可微的调和函数，总可表示为单层位势和双层位势的形式.

这就启发我们，在讨论 Laplace 方程的边值问题时，能否把所要求的解表达成双层位势或单层位势的形式，其中密度函数待定，然后利用所给的边界条件来确定密度函数？回答是肯定的. 这就是在这一节和下一节所要叙述的内容.

为此，就要进一步研究面位势在曲面 S 附近的性质. 从这些面位势的积分构造来看，当不在曲面 S 上的点 M 趋于曲面上时，面位势的被积函数趋于无穷大，因之，这些面位势是一种广义曲面积分. 所以在研究单层位势和双层位势在积分曲面上的性质之前，有必要先对这类广义曲面积分的若干性质进行讨论.

设函数 $F(M, P)$ 当点 P 位在某个有界曲面 Σ 上变动，而空间中的点 $M \neq P$ 时是其所有变元的连续函数，则积分

$$\iint\limits_{\Sigma}F(M, P)\mathrm{d}S_P \tag{7.6}$$

当点 $M\notin\Sigma$ 时是点 M 的连续函数. 如果当点 M 重合于点 P 时, $F(M, P)$ 成为无穷大, 则积分(7.6)当点 M 位在曲面 Σ 上时就是一个广义曲面积分. 要问在什么条件下, 这个广义曲面积分存在, 而且仍然是点 $M\in\Sigma$ 的连续函数? 为此, 需要建立一个判别依赖于参变量的广义曲面积分的连续性的准则.

定义 7.1 设 M_0 是曲面 Σ 上的一点, 若对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 可找到点 M_0 的一个邻域 V 和 Σ 上含有点 M_0 的一小块曲面 Σ_δ, 使得对于 V 内的任一点 M, 积分 $\iint\limits_{\Sigma_\delta} F(M, P)\mathrm{d}S_P$ 存在, 且

$$\left|\iint\limits_{\Sigma_\delta} F(M, P)\mathrm{d}S_P\right|<\varepsilon, \tag{7.7}$$

则称积分(7.6)在曲面 Σ 上的点 M_0 处是一致收敛的.

引理 7.1 设积分(7.6)在曲面 Σ 上某点 M_0 处一致收敛, 则对于位在 Σ 上而与 M_0 点充分接近的一切点 M, 积分(7.6)收敛, 因之, 这个积分在 M_0 点的某个充分小的邻域内所确定的函数 $\mu(M)$ 在 M_0 点是连续的.

证明 按积分 (7.6) 在一点 M_0 一致收敛的定义, 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 可找到 M_0 点的一个邻域 V 和曲面 Σ 上含有点 M_0 的一小块曲面 Σ_δ, 使对 V 内任意的点 M, 积分 $\iint\limits_{\Sigma_\delta} F(M, P)\mathrm{d}S_P$ 存在, 而且满足不等式(7.7). 我们取邻域 V 相当小, 可以使它和 Σ 的相交部分包含在 Σ_δ 内, 因此, 对于此邻域内的一切点 M, 积分(7.6)是收敛的. 这样, 就证明了引理的前一部分.

下面证明积分(7.6)在点 M_0 是连续的. 设点 $M\in V$, 由(7.7)式, 有

$$\left|\iint\limits_{\Sigma_\delta} F(M_0, P)\mathrm{d}S_P\right|<\varepsilon; \quad \left|\iint\limits_{\Sigma_\delta} F(M, P)\mathrm{d}S_P\right|<\varepsilon,$$

从而

$$|\mu(M)-\mu(M_0)|=\left|\iint\limits_{\Sigma} F(M, P)\mathrm{d}S_P-\iint\limits_{\Sigma} F(M_0, P)\mathrm{d}S_P\right|$$

$$\leqslant\left|\iint_{\Sigma_\delta}F(M,\ P)\mathrm{d}S_P\right|+\left|\iint_{\Sigma_\delta}F(M_0,\ P)\mathrm{d}S_P\right|$$

$$+\left|\iint_{\Sigma-\Sigma_\delta}[F(M,\ P)-F(M_0,\ P)]\mathrm{d}S_P\right|$$

$$<2\varepsilon+\iint_{\Sigma-\Sigma_\delta}|F(M,\ P)-F(M_0,\ P)|\mathrm{d}S_P.$$

但是,函数 $F(M,P)$当点 P 沿曲面 $\Sigma-\Sigma_\delta$ 变动,同时点 $M\in V$ 时,是其变元的一致连续函数,所以当点 M 与点 M_0 充分接近时,可以使

$$\iint_{\Sigma-\Sigma_\delta}|F(M,\ P)-F(M_0,\ P)|\mathrm{d}S_P<\varepsilon.$$

这样就得到,当点 M 与点 M_0 充分接近时,有下式成立:

$$|\mu(M)-\mu(M_0)|<3\varepsilon.$$

这就证明了函数 $\mu(M)$在点 M_0 是连续的. 引理的后一部分得证.

我们所要研究的面位势,其积分中的被积函数 $F(M,\ P)$具有某种特殊形式,针对他们的特殊性,我们来证明下面的引理:

引理 7.2 设 Σ 是有界的光滑曲面,函数 $F(M,\ P)$ 当点 M 不重合于点 P 时是其所有变元的连续函数. 如果对于 Σ 上的一点M_0,在 Σ 上存在着含有点 M_0 在内的一小块曲面 Σ_δ,对这块小曲面 Σ_δ 上的任一点 P,有以下不等式成立:

$$|F(M_0,\ P)|\leqslant\frac{C}{r_{M_0P}^{2-\delta}}\quad(0<\delta\leqslant1),$$

其中 C 是正常数,则积分(7.6)在 M_0点收敛. 又若对于点 M_0,可找到 M_0 点的一个邻域 V 以及 Σ 上含有点 M_0 在内的一小块曲面 Σ_δ,使得对于任何点 $M\in V$ 和 $P\in\Sigma_\delta$,有下面的不等式成立:

$$|F(M,\ P)|\leqslant\frac{C}{r_{MP}^{2-\delta}},\tag{7.8}$$

其中 C 是正常数,则积分(7.6)在点 M_0 处一致收敛. 因而,由它所确定的函数 $\mu(M)$在点 M_0 是连续的.

证明 先证引理的后半部分:不妨设点 M_0 为坐标原点,曲面 Σ 在点 M_0 处的切平面为$(\xi,\ \eta)$平面. 记点 P 的坐标为$(\xi,\ \eta,\ \zeta)$,

点 M 的坐标为(x, y, z). 这时, 曲面 Σ 在点 M_0 的近旁可以局部地表示为

$$\zeta=\varphi(\xi, \eta),$$

并且 $\qquad \varphi(0, 0)=0,\ \varphi'_\xi(0, 0)=0,\ \varphi'_\eta(0, 0)=0.$

在(ξ, η)平面上取圆 $\xi^2+\eta^2\leqslant h^2$, 它所对应的曲面 Σ 上的一块记为 Σ_h, 当 h 充分小时, 可以使在 Σ_h 上, φ'_ξ 和 φ'_η 都小于某个常数, 而且在 Σ_h 上, 不等式(7.8)成立. 于是

$$\left|\iint_{\Sigma_h} F(M, P)\mathrm{d}S_P\right|\leqslant C\iint_{\Sigma_h}\frac{\sqrt{1+\varphi_\xi'^2+\varphi_\eta'^2}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{2-\delta}{2}}}$$

$$\leqslant C_1\iint_{\xi^2+\eta^2\leqslant h^2}\frac{\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{\frac{2-\delta}{2}}},$$

其中 C_1 是正常数. 在上式最右端的积分中, 作变量代换

$$x-\xi=s, \quad y-\eta=t,$$

则此积分就化为

$$\iint_{(x-s)^2+(y-t)^2<h^2}\frac{\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t}{(s^2+t^2)^{\frac{2-\delta}{2}}}.$$

今取点 M_0 的邻域 V 如此小, 使得对于 V 中任意的点 $M(x, y, z)$ 都有 $x^2+y^2\leqslant h^2$, 因此对于 V 中的点 M, 有

$$\iint_{(x-s)^2+(y-t)^2<h^2}\frac{\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t}{(s^2+t^2)^{\frac{2-\delta}{2}}}\leqslant\iint_{s^2+t^2<4h^2}\frac{\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t}{(s^2+t^2)^{\frac{2-\delta}{2}}}.$$

当 $h\to0$ 时, 上式趋于零.

这样, 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 我们找到了点 M_0 的这样小邻域 V 和曲面 Σ 上含有点 M_0 的小块曲面 Σ_h, 使得对于 V 中任意的点 M, 有

$$\left|\iint_{\Sigma_h} F(M, P)\mathrm{d}S_P\right|<\varepsilon.$$

也即积分 (7.6) 在 M_0 点是一致收敛的. 再根据引理 7.1, 就得知, 由式(7.6)所确定的函数 $\mu(M)$ 在点 M_0 是连续的.

引理 7.2 的上半部分包括在上面的证明中, 只要固定点 $M=M_0$ 就可以了. 引理 7.2 证毕.

单层位势(7.3)当密度函数 $\omega(P)$ 连续时，满足引理 7.2 的条件，因此，从引理 7.2 立即得知下面的结论成立.

定理 7.2 设曲面 S 是光滑的有界曲面，若单层位势(7.3)中的密度函数 $\omega(P)$ 是 S 上的连续函数，则当点 M 位在曲面 S 上时，积分(7.3)仍收敛，并且在 S 上是连续的.

这样，单层位势(7.3)在 S 为光滑的有界曲面，密度函数 $\omega(P)$ 是连续的假设下，对空间任何点 M 都存在，它是点 M 的连续函数，并且已如前述，除曲面 S 以外，它处处都是调和的.

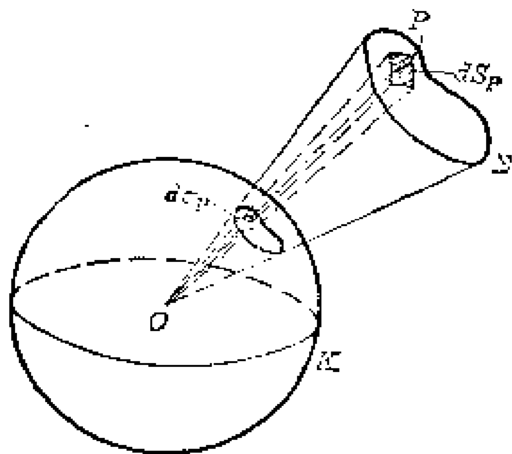


图 7.3

为了考察双层位势(7.4)以及研究单层位势(7.3)的法向导数在曲面 S 近旁的性质，下面要对曲面 S 作若干明确的限制，为此引进 Ляпунов 曲面的概念.

定义 7.2 设 O 是空间某一点，Σ 为一个有向曲面，按从 O 点发出的向径方向将曲面 Σ 投影到以 O 点为中心的单位球面 K 上(图 7.3). 以 dS_P 表示曲面 Σ 在点 P 处的面积元素，$\boldsymbol{n}_P$ 为曲面 Σ 在 P 点的正法向单位向量. 如果 $\cos(\boldsymbol{r}_{OP},\ \boldsymbol{n}_P)$ 为正，规定 dS_P 在 K 上的投影面积 $d\sigma_P$ 取正值，否则，为负，于是

$$d\sigma_P=\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{OP},\ \boldsymbol{n}_P)}{r_{OP}^2}\,dS_P.$$

$d\sigma_P$ 称为从点 O 看曲面块 dS_P 的立体角；$d\sigma_P$ 的代数和称为从点 O 看曲面 Σ 的立体角. 它可表为积分

$$\iint_{\Sigma}\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{OP},\ \boldsymbol{n}_P)}{r_{OP}^2}\,dS_P,$$

称积分

$$\iint_{\Sigma}\left|\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{OP},\ \boldsymbol{n}_P)}{r_{OP}^2}\right|\,dS_P$$

为从点 O 看曲面 Σ 的绝对立体角.

从这个定义可以看出，对于一个闭曲面来说，在此闭曲面内任

一点看此闭曲面的立体角为 4π；在闭曲面外任一点看此闭曲面的立体角为零；而在闭曲面之上任一点看此闭曲面的立体角为 2π.

在此应指出，对于任一曲面来说，从空间里任意点看它的绝对立体角并不一定是有界的.

定义 7.3 满足下述三个条件的有界曲面 Σ 称为 Ляпунов 曲面：

1) 曲面 Σ 是在每点有切平面的有向曲面，取定单位法向量 $\boldsymbol{n}$. 设 P_1、P_2 是曲面 Σ 上任意两点，$\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 是在这两点的单位法向量，以 $\gamma(P_1, P_2)=(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)$ 表示这两个向量所夹的锐角，则存在与点 P_1、P_2 无关的两个正常数 A 和 $\delta(\delta\leqslant 1)$，使不等式

$$\gamma(P_1, P_2)\leqslant Ar_{P_1P_2}^{\delta} \tag{7.9}$$

对于 P_1、P_2 点在曲面 Σ 上的任意位置都成立，这里 $r_{P_1P_2}$ 表示点 P_1、P_2 间的距离.

2) 对于曲面 Σ 上每一点 P_0，都可作一个以 P_0 点为中心、d 为半径的球 K_{P_0}，d 的大小与 P_0 点的位置无关，使曲面 Σ 在此球内的部分 Σ_{P_0} 与任一同 P_0 点法线平行的直线相交不多于一点.

3) 从空间任意点 P_0 看曲面 Σ 任一部分的绝对立体角 B_{P_0} 都是有界的：

$$B_{P_0}\leqslant k_0 \quad (k_0\text{ 是正常数}).$$

上述条件 2)意味着，如果取点 P_0 为坐标原点，曲面 Σ 在 P_0 点的法线为 z 轴，则 Σ 在球内部分 Σ_{P_0} 的曲面方程可用显式

$$z=\varphi(x, y)$$

表示. 这里 $\varphi(x, y)$ 是确定的（单值）函数，且 $\varphi(0, 0)=0$，$\varphi_x'(0, 0)=0$，$\varphi_y'(0, 0)=0$. 又从条件 1)知道，曲面 Σ 的法线方向沿曲面是连续变化的，因而函数 $\varphi(x, y)$ 应具有连续的一阶偏导数.

以后，都假设面位势中的曲面 S 是 Ляпунов 曲面. 显然，对于 Ляпунов 曲面，前面所述的引理和定理仍然是正确的.

引理 7.3 设 S 是 Ляпунов 曲面，则对于它上面的任何两点 P 和 M，有以下估计式成立：

$$\left|\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM},\ \boldsymbol{n}_P)}{r_{PM}^2}\right| \leqslant \frac{C}{r_{PM}^{2-\delta}}, \tag{7.10}$$

其中 C 是一个与点无关的正常数，δ 是出现在 Ляпунов 曲面条件 1)中的常数($0<\delta\leqslant 1$)．

证明 首先证明，对于曲面 S 上的任一点 M，当点 P 位于 S 在球 K_M 内部分 S_M 上时，估计式(7.10)成立．事实上，可以把 M 点作为坐标原点，把曲面 S 在点 M 的切平面取为$(x,\ y)$平面，把 M 点的法线方向作为 z 轴的方向，这样就建立了点 M 的局部坐标系．点 P 的坐标记为$(x,\ y,\ z)$，于是

$$\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM},\ \boldsymbol{n}_P)}{r_{PM}^2} = -\frac{x}{r_{PM}^3}\cos(\boldsymbol{n}_P,\ \boldsymbol{i}) - \frac{y}{r_{PM}^3}\cos(\boldsymbol{n}_P,\ \boldsymbol{j}) - \frac{z}{r_{PM}^3}\cos(\boldsymbol{n}_P,\ \boldsymbol{k}), \tag{7.11}$$

其中 $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ 表示坐标轴方向的单位向量．要对它进行估计．

我们把曲面 S_M 的方程写为

$$z=\varphi(x,\ y),$$

且 $\varphi(0,\ 0)=0$，$\varphi'_x(0,\ 0)=0$，$\varphi'_y(0,\ 0)=0$ 以及 $\varphi(x,\ y)$ 具有一阶连续偏导数．另外选取这样小的正常数 d，使 $Ad^\delta<1$，这里 A 和 δ 是不等式(7.9)中出现的正常数．这就是说，曲面 S_M 上的任意点 P 的法线与点 M 的法线间的夹角不超过 $\frac{\pi}{2}$．于是，曲面 S_M 上任一点 $P(x,\ y,\ z)$的法线方向余弦为

$$\cos(\boldsymbol{n}_P,\ \boldsymbol{i})=\frac{-\varphi'_x}{\sqrt{1+\varphi_x'^2+\varphi_y'^2}};\quad \cos(\boldsymbol{n}_P,\ \boldsymbol{j})=\frac{-\varphi'_y}{\sqrt{1+\varphi_x'^2+\varphi_y'^2}};$$

$$\cos(\boldsymbol{n}_P,\ \boldsymbol{k})=\frac{1}{\sqrt{1+\varphi_x'^2+\varphi_y'^2}},$$

从而 $$\varphi'_x=-\frac{\cos(\boldsymbol{n}_P,\ \boldsymbol{i})}{\cos(\boldsymbol{n}_P,\ \boldsymbol{k})},\quad \varphi'_y=-\frac{\cos(\boldsymbol{n}_P,\ \boldsymbol{j})}{\cos(\boldsymbol{n}_P,\ \boldsymbol{k})}.$$

由于 $\boldsymbol{n}_M=\boldsymbol{k}$，我们有

$$\cos(\boldsymbol{n}_P,\ \boldsymbol{i})=\boldsymbol{n}_P\cdot\boldsymbol{i}=(\boldsymbol{n}_P-\boldsymbol{n}_M)\cdot\boldsymbol{i},$$

$$\cos(\boldsymbol{n}_P,\ \boldsymbol{j})=\boldsymbol{n}_P\cdot\boldsymbol{j}=(\boldsymbol{n}_P-\boldsymbol{n}_M)\cdot\boldsymbol{j},$$

$$\cos(\boldsymbol{n}_P,\ \boldsymbol{k})=\boldsymbol{n}_P\cdot\boldsymbol{k}=(\boldsymbol{n}_P-\boldsymbol{n}_M)\cdot\boldsymbol{k}+\boldsymbol{n}_M\cdot\boldsymbol{k}$$

$$=1+(\boldsymbol{n}_P-\boldsymbol{n}_M)\cdot\boldsymbol{k}.$$

利用 Ляпунов 曲面的条件 1) 中的不等式(7.9), 并注意到

$$|\boldsymbol{n}_P-\boldsymbol{n}_M|=\sqrt{2[1-\cos(\boldsymbol{n}_P,\ \boldsymbol{n}_M)]}\leqslant(\boldsymbol{n}_P,\ \boldsymbol{n}_M)=\gamma(P,\ M),$$

就得到

$$|\cos(\boldsymbol{n}_P,\ \boldsymbol{i})|\leqslant Ar_{PM}^{\delta},$$
$$|\cos(\boldsymbol{n}_P,\ \boldsymbol{j})|\leqslant Ar_{PM}^{\delta}\quad(0<\delta\leqslant 1)$$
$$|\cos(\boldsymbol{n}_P,\ \boldsymbol{k})|\geqslant 1-Ar_{PM}^{\delta}.$$

现在取球 K_M 的半径 δ 更小些, 使得对于曲面 S_M 上的任何点 P, 有

$$Ar_{PM}^{\delta}<\frac{1}{2}$$

成立. 且按假设, d 的选择是同点 M 的位置无关的. 这样, 就有

$$|\cos(\boldsymbol{n}_P,\ \boldsymbol{k})|>\frac{1}{2}.$$

从而 $$|\varphi'_x|\leqslant 2Ar_{PM}^{\delta},\quad |\varphi'_y|\leqslant 2Ar_{PM}^{\delta}.$$

现在估计 $z=\varphi(x,\ y)$ 的值. 利用有限增量定理, 有

$$\varphi(x,\ y)=x\varphi'_x(\tilde{x},\ \tilde{y})+y\varphi'_y(\tilde{x},\ \tilde{y}),$$

其中 $(\tilde{x},\ \tilde{y})$ 是原点和点 $(x,\ y)$ 联结线段上的某个点. 因为

$$|x|\leqslant r_{PM},\quad |y|\leqslant r_{PM},$$

所以 $$|z|=|\varphi(x,\ y)|\leqslant 4Ar_{PM}^{1+\delta}.$$

这样, 由等式(7.11), 就得到

$$\left|\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM},\ \boldsymbol{n}_P)}{r_{PM}^2}\right|\leqslant\left|\frac{x}{r_{PM}^3}\cos(\boldsymbol{n}_P,\ \boldsymbol{i})\right|+\left|\frac{y}{r_{PM}^3}\cos(\boldsymbol{n}_P,\ \boldsymbol{j})\right|$$
$$+\left|\frac{z}{r_{PM}^3}\cos(\boldsymbol{n}_P,\ \boldsymbol{k})\right|$$
$$\leqslant Ar_{PM}^{\delta-2}+Ar_{PM}^{\delta-2}+4Ar_{PM}^{\delta-2}$$
$$=6Ar_{PM}^{\delta-2}.$$

这个不等式对于曲面 S 上的任何点 M, 当点 P 位于 S_M 上时恒成立.

再根据 Ляпунов 曲面的条件 1), 球 K_M 的半径 d 的大小与点 M 的位置无关. 当点 P 不在 S_M 上时, 由于 $r_{PM}>d$, 故总有

$$\left|\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM}, \boldsymbol{n}_P)}{r_{PM}^2}\right| \leqslant \frac{1}{r_{PM}^2} \leqslant \frac{1}{d^\delta r_{PM}^{2-\delta}}.$$

取
$$C=\max\left(6A,\ \frac{1}{d^\delta}\right),$$

就得到了估计式(7.10). 引理 7.3 证毕.

根据上述引理 7.3, 若曲面 S 是 Ляпунов 曲面, 则双层位势(7.4)当密度函数 $\nu(P)$ 为连续函数时, 就满足引理 7.2 的前半部分的条件, 因此, 就可推出双层位势(7.4)在曲面 S 上应具有下面的性质, 即下述定理:

定理 7.3 若曲面 S 为 Ляпунов 曲面, 密度函数 $\nu(P)$ 在曲面 S 上是连续的, 则积分(7.4) 当点 $M\in S$ 时仍是收敛的, 也即双层位势在曲面 S 上仍然是有意义的.

为了求解边值问题的需要, 需进一步研究双层位势(7.4)所给出的积分在曲面 S 上的性质. 下面只对 Ляпунов 闭曲面 S 来讨论. 同前面一样, 仍以 D^+ 表示曲面 S 的内部所围的有界区域, 以 D^- 表示 S 的外部无界区域.

定理 7.4 若双层位势(7.4)的密度函数 $\nu(P)$ 在曲面 S 上是连续的, 则积分(7.4)当点 M 通过曲面 S 时有第一类间断性. 更确切地说, 由式 (7.4) 所确定的函数 $u(M)$ 在曲面 S 上是连续的, 对于曲面 S 上的任意点 P_0, 有下式成立:

$$\begin{aligned} u_I(P_0) &= \lim_{\substack{M\in D^+\\ M\to P_0\in S}} u(M) = u(P_0) - 2\pi\nu(P_0), \\ u_E(P_0) &= \lim_{\substack{M\in D^-\\ M\to P_0\in S}} u(M) = u(P_0) + 2\pi\nu(P_0), \end{aligned} \tag{7.12}$$

其中
$$u(P_0)=\iint_S \nu(P)\,\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PP_0}, \boldsymbol{n}_P)}{r_{PP_0}^2}\,\mathrm{d}S_P.$$

证明 首先考虑具有单位密度的双层位势

$$u_1(M)=\iint_S \frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM}, \boldsymbol{n}_P)}{r_{PM}^2}\,\mathrm{d}S_P,$$

证明如下结果成立:

$$u_1(M)=\begin{cases}-4\pi, \text{当点 } M\in D^+ \text{ 时;}\\ -2\pi, \text{当点 } M\in S \text{ 时;}\\ 0, \quad \text{当点 } M\in D^- \text{ 时.}\end{cases} \tag{7.13}$$

事实上，设 M 是空间内任一点，P 是曲面 S 上的动点，根据立体角的定义，从点 M 看曲面 S 上的某块曲面元素 dS_P 的立体角等于

$$d\sigma_P=\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{MP},\ \boldsymbol{n}_P)}{r_{PM}^2}dS_P=-\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM},\ \boldsymbol{n}_P)}{r_{PM}^2}dS_P,$$

即积分 $u_1(M)$ 表示从 M 点看闭曲面 S 的立体角的负值. 根据立体角的性质，分别考虑当点 M 在闭曲面 S 里面、在曲面 S 上面和在闭曲面 S 外部三种情况，即可得到公式(7.13).

现在考虑具有连续密度函数 $\nu(P)$ 的一般双层位势(7.4)：在曲面 S 上任意取定一点 P_0，考虑双层位势

$$u_0(M)=\iint\limits_S[\nu(P)-\nu(P_0)]\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM},\ \boldsymbol{n}_P)}{r_{PM}^2}dS_P. \tag{7.14}$$

如果能够证明上式右端积分在点 $M=P_0$ 一致收敛，则根据引理 7.1 即可推出函数 $u_0(M)$ 在点 $M=P_0$ 是连续的. 假设已经证明了这一点. 把(7.14)式写为

$$u_0(M)=u(M)-u_1(M)\nu(P_0),$$

其中 $u(M)$ 是双层位势(7.4)，而 $u_1(M)$ 是具单位密度的双层位势. 先设点 M 在曲面 S 上，记它为 $\tilde{P}$，利用(7.13)得到

$$u_0(\tilde{P})=u(\tilde{P})+2\pi\nu(P_0),$$

此外又有

$$u_0(P_0)=u(P_0)+2\pi\nu(P_0),$$

上面二式中的 $u(\tilde{P})$ 和 $u(P_0)$ 是积分(7.4)分别在点 $\tilde{P}$ 和 P_0 的值. 现在令曲面 S 上的点 $\tilde{P}$ 趋于点 P_0，由于假设已经证明了函数 $u_0(M)$ 的连续性，故有

$$u_0(\tilde{P})\to u_0(P_0)=u(P_0)+2\pi\nu(P_0),$$

从而，函数 $u(\tilde{P})$ 有极限 $u(P_0)$. 这就是说，由积分(7.4)所确定的函数 $u(M)$ 在曲面 S 上是连续的.

其次，考虑点 M 位于闭曲面 S 所围的内部区域 D^+ 内和位于

S 外部区域 D^- 中的情形.

当点 $M\in D^+$ 时，利用公式(7.13)，有

$$u_0(M)=u(M)+4\pi\nu(P_0),$$

令点 M 趋于点 $P_0\in S$，由于假设已经证明了函数 $u_0(M)$ 的连续性，故有

$$u_0(M)\to u_0(P_0)=u(P_0)+2\pi\nu(P_0). \tag{7.15}$$

因此，函数 $u(M)$ 也具有极限，用 $u_I(P_0)$ 表示这个极限，就得到

$$u_I(P_0)+4\pi\nu(P_0)=u(P_0)+2\pi\nu(P_0),$$

这就是 $$u_I(P_0)=\lim_{\substack{M\in D^+\\ M\to P_0\in S}}u(M)=u(P_0)-2\pi\nu(P_0).$$

(7.12)的第一式得证. 由此可见，如果 $\nu(P_0)\neq 0$，则函数 $u(M)$ 在点 $P_0\in S$ 的值 $u(P_0)$ 与当 $M\in D^+$ 且 $M\to P_0\in S$ 时的极限值 $u_I(P_0)$ 是不同的. 如果 $M\in D^-$，根据(7.13)式则有

$$u_0(M)=u(M).$$

照上述方法同样的讨论可知：当位于闭曲面 S 的外部区域 D^- 中的点 M 趋于 S 上的点 P_0 时，$u(M)$ 的极限也是存在的，用 $u_E(P_0)$ 来记这个极限，并利用(7.15)式，就有

$$u_E(P_0)=\lim_{\substack{M\in D^-\\ M\to P_0\in S}}u(M)=u(P_0)+2\pi\nu(P_0).$$

这样就证明了公式(7.12)中的第二式.

余下来还要证明积分 (7.14) 在点 P_0 的一致收敛性. 为此，如同在引理 7.2 的证明过程中一样取曲面 S_h，并估计形如(7.14)的积分在 S_h 上的值，则有

$$\left|\iint_{S_h}[\nu(P)-\nu(P_0)]\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM},\boldsymbol{n}_P)}{r_{PM}^2}\mathrm{d}S_P\right|$$

$$\leqslant\max_{P\in S_h}|\nu(P)-\nu(P_0)|\iint_{S_h}\left|\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM},\boldsymbol{n}_P)}{r_{PM}^2}\right|\mathrm{d}S_P,$$

上式右端的积分表示曲面 S_h 对于点 M 所张的绝对立体角，按 Ляпунов 曲面的假设条件 3)，应有

$$\iint_{S_h}\left|\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM},\ \boldsymbol{n}_P)}{r_{PM}^2}\right|\mathrm{d}S_P\leqslant k_0,$$

从而

$$\left|\iint_{S_h}[\nu(P)-\nu(P_0)]\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM},\ \boldsymbol{n}_P)}{r_{PM}^2}\mathrm{d}S_P\right|$$

$$\leqslant k_0\max_{P\in S_h}|\nu(P)-\nu(P_0)|.$$

对于任意给定的正数 ε, 只要 $h>0$ 充分小, 根据密度函数 $\nu(P)$ 的连续性假设, 就可推知上式的左端对于 P_0 点的某个充分小的邻域内的一切点 M 都可小于 ε. 定理 7.4 证毕.

由此定理可断言: 由公式 (7.4) 所确定的函数 $u(M)$ 在区域 D^+ 内连续, 并能连续地延拓到边界曲面 S 上; 同样, 这个函数 $u(M)$ 在区域 D^- 中连续, 并也能连续地延拓到曲面 S 上.

不难看出, 当点 M 趋于无穷远时, 双层位势 $u(M)$ 一致趋于零. 事实上, 设取半径适当大的球 K, 它的内部包含有整个闭曲面 S, 以 R_0 表示球 K 的球面与闭曲面 S 之间的最短距离, 则对于球 K 外的任意点 M, 由积分 (7.4) 表示的双层位势 $u(M)$ 总能使下列的估计式成立:

$$|u(M)|=\left|\iint_S\nu(P)\ \frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM},\ \boldsymbol{n}_P)}{r_{PM}^2}\mathrm{d}S_P\right|$$

$$\leqslant\frac{A_0}{R_0^2}\times(S\ \text{的面积}),$$

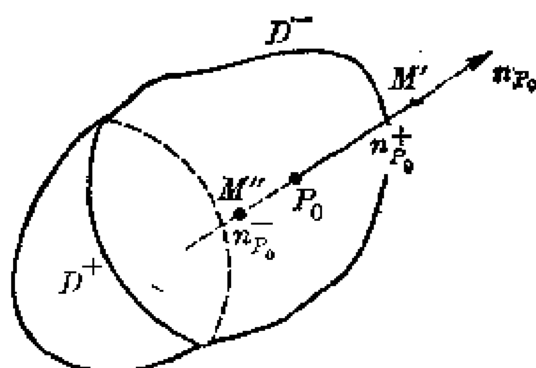


图 7.4

其中 $|\nu(P)|\leqslant A_0$, A_0 是正常数, 由此即推出前面的断言. 更确切地说, 如果 O 是任意定点, 则由积分 (7.4) 所表达的双层位势 $u(M)$ 当点 M 趋于无穷远时是以同 $\frac{1}{r_{OM}^2}$ 一样的阶数趋于零.

下面转入研究单层位势 (7.3) 的性质:

设点 $P_0 \in S$，曲面 S 在 P_0 点的法线为 n_{P_0}，取其正向 $\boldsymbol{n}_{P_0}$ 为指向 D^+ 外部的区域，以 $n_{P_0}^+$ 表示此法线在区域 D^- 中的部分；以 $n_{P_0}^-$ 表示它在区域 D^+ 中的部分．如图 7.4 所示．

对于确定在 P_0 点某个邻域内的函数 $F(M)$，定义

$$\frac{\partial F(P_0)}{\partial n_{P_0}^+} = \lim_{\substack{M' \in n_{P_0}^+ \\ M' \to P_0 \in S}} \frac{F(M') - F(P_0)}{r_{M'P_0}},$$

$$\frac{\partial F(P_0)}{\partial n_{P_0}^-} = \lim_{\substack{M'' \in n_{P_0}^- \\ M'' \to P_0 \in S}} \frac{F(P_0) - F(M'')}{r_{P_0M''}}$$

（假设右端极限存在），并分别称此两式为函数 $F(M)$ 在 P_0 点的外法向导数和内法向导数．

易见，如果对于点 $M \in n_{P_0}^+$ 法向导数

$$\frac{\partial F(M)}{\partial n_{P_0}} = \lim_{\substack{M' \to M \\ M' \in n_{P_0}}} \frac{F(M') - F(M)}{r_{M'M}}$$

存在，且当点 M 沿着 $n_{P_0}^+$ 趋向于点 $P_0 \in S$ 时有极限，则 $\dfrac{\partial F(P_0)}{\partial n_{P_0}^+}$ 一定存在，且

$$\frac{\partial F(P_0)}{\partial n_{P_0}^+} = \lim_{\substack{M \in n_{P_0}^+ \\ M \to P_0 \in S}} \frac{\partial F(M)}{\partial n_{P_0}}.$$

类似地，有

$$\frac{\partial F(P_0)}{\partial n_{P_0}^-} = \lim_{\substack{M \in n_{P_0}^- \\ M \to P_0 \in S}} \frac{\partial F(M)}{\partial n_{P_0}}.$$

对于单层位势(7.3)在曲面 S 上的法向导数，有下面的定理：

定理 7.5 若积分(7.3)中的密度函数 $\omega(P)$ 是曲面 S 上的连续函数，则由(7.3)所确定的单层位势 $u(M)$ 在任一点 $P_0 \in S$ 有法向导数 $\dfrac{\partial u(P_0)}{\partial n_{P_0}^+}$ 与 $\dfrac{\partial u(P_0)}{\partial n_{P_0}^-}$，并且

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(P_0)}{\partial n_{P_0}^+} &= -\iint_S \omega(P) \frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PP_0}, \boldsymbol{n}_{P_0})}{r_{PP_0}^2} \mathrm{d}S_P - 2\pi\omega(P_0); \\ \frac{\partial u(P_0)}{\partial n_{P_0}^-} &= -\iint_S \omega(P) \frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PP_0}, \boldsymbol{n}_{P_0})}{r_{PP_0}^2} \mathrm{d}S_P + 2\pi\omega(P_0). \end{aligned} \tag{7.16}$$

(7.16)右端的积分都是收敛的．

证明 如果法线 n_{P_0} 上的点 M 不在曲面 S 上，则由(7.3)所确定的函数 $u(M)$ 关于 n_{P_0} 的法向导数是存在的，它可以通过积分号下求导数而得到

$$\frac{\partial u(M)}{\partial n_{P_0}}=\iint_S \omega(P)\frac{\partial}{\partial n_{P_0}}\left(\frac{1}{r_{PM}}\right)\mathrm{d}S_P$$

$$=-\iint_S \omega(P)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM},\ \boldsymbol{n}_{P_0})}{r_{PM}^2}\mathrm{d}S_P.$$

现在考察上式当 M 点沿 n_{P_0} 趋于点 $P_0\in S$ 时的情形：

为此，考虑双层位势

$$u_2(M)=\iint_S \omega(P)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM},\ \boldsymbol{n}_P)}{r_{PM}^2}\mathrm{d}S_P,$$

设点 $M\in n_{P_0}$，但不在曲面 S 上，作

$$\frac{\partial u(M)}{\partial n_{P_0}}+u_2(M)=\iint_S \omega(P)\left[\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM},\ \boldsymbol{n}_P)}{r_{PM}^2}-\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM},\ \boldsymbol{n}_{P_0})}{r_{PM}^2}\right]\mathrm{d}S_P. \tag{7.17}$$

我们要证明，上式右端积分在点 $P_0\in S$ 仍然有意义，而且当点 M 沿着法线 n_{P_0} 趋于点 P_0 时保持连续.

事实上，只要证明(7.17)式右端的积分在点 $P_0\in S$ 有下面意义的一致收敛性就可以了，也即要证明，对于任意给定的正数 ε，可以找到法线 n_{P_0} 上包含点 P_0 在内的一小段 l 和曲面 S 上含有点 P_0 的一小块曲面 S_h，使对于 l 上的任何点 M，积分

$$\iint_{S_h} \omega(P)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM},\ \boldsymbol{n}_P)-\cos(\boldsymbol{r}_{PM},\ \boldsymbol{n}_{P_0})}{r_{PM}^2}\mathrm{d}S_P$$

收敛，且有

$$\left|\iint_{S_h} \omega(P)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM},\ \boldsymbol{n}_P)-\cos(\boldsymbol{r}_{PM},\ \boldsymbol{n}_{P_0})}{r_{PM}^2}\mathrm{d}S_P\right|<\varepsilon$$

成立. 在证明了这一点以后，同前面的证明过的引理7.1一样，就能肯定 (7.17) 式右端的积分沿着法线 n_{P_0} 在 $P_0\in S$ 点是连续的了. 下面就证明这一点.

设点 $M\in n_{P_0}$，在曲面 S 上取含有点 P_0 的一小块曲面 σ，它全部落在球 K_{P_0} 内．记 $\max\limits_{P\in\sigma}|\omega(P)|=C$．我们有

$$\left|\omega(P)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM},\ \boldsymbol{n}_P)-\cos(\boldsymbol{r}_{PM},\ \boldsymbol{n}_{P_0})}{r_{PM}^2}\right|$$

$$\leqslant C\ \frac{|\cos(\boldsymbol{r}_{PM},\ \boldsymbol{n}_P)-\cos(\boldsymbol{r}_{PM},\ \boldsymbol{n}_{P_0})|}{r_{PM}^2}$$

$$\leqslant 2C\ \frac{\left|\sin\dfrac{(\boldsymbol{r}_{PM},\ \boldsymbol{n}_P)-(\boldsymbol{r}_{PM},\ \boldsymbol{n}_{P_0})}{2}\right|}{r_{PM}^2}$$

$$\leqslant 2C\ \frac{\left|\sin\dfrac{(\boldsymbol{n}_P,\ \boldsymbol{n}_{P_0})}{2}\right|}{r_{PM}^2}\leqslant C\ \frac{\gamma(P,\ P_0)}{r_{PM}^2}.$$

根据 Ляпунов 曲面的条件 1) 中的不等式 (7.9) 知：

$$\gamma(P,\ P_0)<Ar_{PP_0}^{\delta}\leqslant A_1r_{PM}^{\delta},$$

其中 A_1 是正常数．这样，就得到了对于点 $M\in n_{P_0}$、点 $P\in\sigma$，(7.17) 式右端积分中的被积函数适合条件

$$\left|\omega(P)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM},\ \boldsymbol{n}_P)-\cos(\boldsymbol{r}_{PM},\ \boldsymbol{n}_{P_0})}{r_{PM}^2}\right|\leqslant\frac{C_1}{r_{PM}^{2-\delta}},$$

其中 C_1 是个正常数．因之，前面引理 7.2 的后半部分完全可以移植到这里来（按这里所说的一致收敛性意义），从而积分 (7.17) 当点 M 沿法线 n_{P_0} 趋于点 $P_0\in S$ 时保持连续性．

对 (7.17) 式取当 M 点沿法线 n_{P_0} 趋于点 $P_0\in S$ 时的极限，就得到

$$\lim_{\substack{M'\in n_{P_0}\\ M'\to P_0\in S}}\left[\frac{\partial u(M')}{\partial n_{P_0}}+u_2(M')\right]=\lim_{\substack{M''\in n_{P_0}\\ M''\to P_0\in S}}\left[\frac{\partial u(M'')}{\partial n_{P_0}}+u_2(M'')\right]$$

$$=\iint_S\omega(P)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PP_0},\ \boldsymbol{n}_P)-\cos(\boldsymbol{r}_{PP_0},\ \boldsymbol{n}_{P_0})}{r_{PP_0}^2}\,dS_P.\qquad(7.18)$$

但是 (7.17) 式的函数 $u_2(M)$ 当点 M 通过曲面 S 时具有第一类间断性，根据定理 7.4，可知：

$$\lim_{\substack{M'\in n_{P_0}\\ M'\to P_0\in S}}u_2(M')=\iint_S\omega(P)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PP_0},\ \boldsymbol{n}_P)}{r_{PP_0}^2}\,dS_P+2\pi\omega(P_0),$$

$$\lim_{\substack{M''\in n_{P_0}^- \\ M''\to P_0\in S}} u_2(M'')=\iint_S \omega(P)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PP_0},\ \boldsymbol{n}_{P_0})}{r_{PP_0}^2}\mathrm{d}S_P-2\pi\omega(P_0),$$

因之,从(7.18)式就推出,极限

$$\frac{\partial u(P_0)}{\partial n_{P_0}^+}=\lim_{\substack{M'\in n_{P_0}^+ \\ M'\to P_0\in S}}\frac{\partial u(M')}{\partial n_{P_0}},\quad \frac{\partial u(P_0)}{\partial n_{P_0}^-}=\lim_{\substack{M''\in n_{P_0}^- \\ M''\to P_0\in S}}\frac{\partial u(M'')}{\partial n_{P_0}}$$

和积分

$$\iint_S \omega(P)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PP_0},\ \boldsymbol{n}_{P_0})}{r_{PP_0}^2}\mathrm{d}S_P$$

都存在,并且有

$$\frac{\partial u(P_0)}{\partial n_{P_0}^+}=-\iint_S \omega(P)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PP_0},\ \boldsymbol{n}_{P_0})}{r_{PP_0}^2}\mathrm{d}S_P-2\pi\omega(P_0),$$

$$\frac{\partial u(P_0)}{\partial n_{P_0}^-}=-\iint_S \omega(P)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PP_0},\ \boldsymbol{n}_{P_0})}{r_{PP_0}^2}\mathrm{d}S_P+2\pi\omega(P_0).$$

这就是所要证明的结果(7.16)式. 定理证毕.

类似于对双层位势的讨论,可以证明,当点 M 趋于无穷远时,由积分(7.3)确定的单层位势 $u(M)$ 一致趋于零.

§2 应用位势解边值问题

应用位势解决 Laplace 方程的几个重要的定解问题,把这些定解问题的解表达为具有待定密度函数的位势,然后使其满足定解问题中给定的边界条件,就得出关于密度函数的积分方程.

设 S 是 Ляпунов 闭曲面,把它所围的内部有界区域记为 D^+;外部无界区域记为 D^-. 对于 Laplace 方程,考虑下面四个典型的定解问题:

Dirichlet 内问题 求一个在区域 D^+ 内调和、在 D^++S 上连续的函数 u,满足边界条件

$$u|_S=f_1(M_S), \tag{7.19}$$

这里 M_S 表示曲面 S 上的点,$f_1(M_S)$是给定在 S 上的连续函数.

Dirichlet 外问题 求一个在区域 D^- 内调和、在 D^-+S 上连续,在无穷远点为零的函数 u,满足边界条件

$$u|_S=f_E(M_S),\tag{7.20}$$

这里 M_S 表示曲面 S 上的点，$f_E(M_S)$ 是给定在 S 上的连续函数.

Neumann 内问题 求一个在区域 D^+ 内调和、在 D^++S 上连续的函数 u, 它在曲面 S 的任一点具有法向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$, 且满足边界条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=g_I(M_S),\tag{7.21}$$

这里 M_S 表示曲面 S 上的点，$g_I(M_S)$ 是给定在 S 上的连续函数，而 n 表示 S 的(对区域 D^+ 而言的)外法线.

Neumann 外问题 求一个在区域 D^- 内调和、在 D^-+S 上连续、在无穷远点为零的函数 u, 它在曲面 S 的每一点具有法向导数 $\frac{\partial u}{\partial n'}$, 且满足边界条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n'}\right|_S=g_E(M_S),\tag{7.22}$$

这里 M_S 表示曲面 S 上的点，$g_E(M_S)$ 是给定在 S 上的连续函数，而 n' 表示曲面 S 的对区域 D^- 而言的外法线，也即对区域 D^+ 而言的内法线.

为了解 Dirichlet 内问题，先作出含有任意函数的调和函数 u, 把它表示成具有密度 $\nu(P)$ 的双层位势

$$u(M)=\iint_S\nu(P)\,\frac{\cos(r_{PM},\ n_P)}{r_{PM}^2}\,\mathrm{d}S_P,$$

其中 $\nu(P)$ 是待定的连续函数. 由公式(7.13)的第一式，有

$$u_I(M_S)=\iint_S\nu(P)\,\frac{\cos(r_{PM_S},\ n_P)}{r_{PM_S}^2}\,\mathrm{d}S_P-2\pi\nu(M_S),$$

因之，要使满足边界条件(7.19)，必须而且只须函数 $\nu(P)$ 满足方程

$$f_I(M_S)=\iint_S\nu(P)\,\frac{\cos(r_{PM_S},\ n_P)}{r_{PM_S}^2}\,\mathrm{d}S_P-2\pi\nu(M_S),$$

或写为

$$\boldsymbol{\nu}(M_S)=\frac{1}{2\pi}\iint_S \nu(P)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM_S},\boldsymbol{n}_P)}{r_{PM_S}^2}\mathrm{d}S_P-\frac{1}{2\pi}f_I(M_S).$$

(7.23)

这是关于未知函数 $\nu(P)$ 的积分方程.

同样地, 对于 Dirichlet 外问题, 可以得到一个关于待定函数 $\boldsymbol{\nu}(P)$ 所应满足的类似的积分方程:

$$\boldsymbol{\nu}(M_S)=-\frac{1}{2\pi}\iint_S \nu(P)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM_S},\boldsymbol{n}_P)}{r_{PM_S}^2}\mathrm{d}S_P+\frac{1}{2\pi}f_E(M_S).$$

(7.24)

在方程(7.23)和(7.24)中的 $\boldsymbol{n}_P$ 是曲面 S 上的点 P 处的外法向.

为了解 Neumann 内问题, 取具有待定连续密度函数 $\omega(P)$ 的单层位势

$$u(M)=\iint_S \frac{\omega(P)}{r_{PM}}\mathrm{d}S_P$$

作为所要求的解, 为使它满足边界条件(7.21), 必须

$$\lim_{\substack{M''\in n_{M_S}^-\\ M''\to M_S}}\frac{\partial u(M'')}{\partial n_{M_S}}=\frac{\partial u(M_S)}{\partial n_{M_S}^-}=g_I(M_S),$$

于是根据公式(7.16)的第二式, 就得到待定连续函数 $\omega(P)$ 所应满足的积分方程:

$$\omega(M_S)=\frac{1}{2\pi}\iint_S \omega(P)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM_S},\boldsymbol{n}_{M_S})}{r_{PM_S}^2}\mathrm{d}S_P+\frac{1}{2\pi}g_I(M_S),$$

(7.25)

其中 $\boldsymbol{n}_{M_S}$ 是曲面 S 在点 M_S 处的外法向.

同样地, 对于 Neumann 外问题, 可得到未知函数 $\omega(P)$ 所应满足的类似的积分方程

$$\omega(M_S)=-\frac{1}{2\pi}\iint_S \omega(P)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM_S},\boldsymbol{n}_{M_S})}{r_{PM_S}^2}\mathrm{d}S_P+\frac{1}{2\pi}g_E(M_S),$$

(7.26)

其中 $\boldsymbol{n}_{M_S}$ 是曲面 S 上的点 M_S 处的外法向. 这里要指出的是, 对 Neumann 外问题来讲, 区域 D^- 的外法线是区域 D^+ 的内法线,

所以上式中 $g_E(M_S)$ 前仍为正号.

这样一来,为讨论 Laplace 方程的内、外 Dirichlet 问题和内、外 Neumann 问题,得到了相应的积分方程 (7.23)、(7.24) 和 (7.25)、(7.26). 现在转入讨论这些积分方程.

首先记核

$$k(M, P)=\frac{1}{2\pi}\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM}, \boldsymbol{n}_P)}{r_{PM}^2},$$

其共轭核是

$$k(P, M)=\frac{1}{2\pi}\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{MP}, \boldsymbol{n}_M)}{r_{PM}^2}=-\frac{1}{2\pi}\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM}, \boldsymbol{n}_M)}{r_{PM}^2}.$$

因之,积分方程(7.23)、(7.24)、(7.25)、(7.26)可以分别写为

$$\nu(M)=\iint_S k(M, P)\nu(P)\mathrm{d}S_P-\frac{1}{2\pi}f_I(M); \qquad (7.27)$$

$$\nu(M)=-\iint_S k(M, P)\nu(P)\mathrm{d}S_P+\frac{1}{2\pi}f_E(M); \qquad (7.28)$$

$$\omega(M)=-\iint_S k(P, M)\omega(P)\mathrm{d}S_P+\frac{1}{2\pi}g_I(M); \qquad (7.29)$$

$$\omega(M)=\iint_S k(P, M)\omega(P)\mathrm{d}S_P+\frac{1}{2\pi}g_E(M), \qquad (7.30)$$

在以上各式中,为了书写简便起见,已将 M_S 改写为 M.

这样,我们就看到,积分方程(7.27)和(7.30)是互为共轭的;积分方程(7.28)和(7.29)是互为共轭的. 又根据上节的引理 7.3 中的不等式(7.10),有

$$|k(M, P)|=\left|\frac{1}{2\pi}\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM}, \boldsymbol{n}_P)}{r_{PM}^2}\right|\leqslant\frac{C_1}{r_{PM}^{2-\delta}},$$

其中 C_1 是正常数, $0<\delta\leqslant 1$. 因之,这些积分方程的核都是弱奇性的,它们是第二章里所讨论过的 Fredholm 型积分方程,对于这样的积分方程, Fredholm 诸定理都成立.

下面,就利用 Fredholm 诸定理来证明上面所述的四个重要定解问题的解的存在性.

引理 7.4 若单层位势

$$u(M)=\iint\limits_{S}\frac{\omega(P)}{r_{PM}}\mathrm{d}S_P$$

的密度函数 $\omega(P)$ 在曲面 S 上连续，函数 $u(M)$ 在 S 上的各点 P 的外法向导数 $\frac{\partial u}{\partial n_P^-}$ 都等于零，则密度函数 $\omega(P)$ 在 S 上也恒等于零.

证明 因为 $\omega(P)$ 是曲面 S 上的连续函数，所以 $u(M)$ 在 S 上各点 P 的内、外法向导数 $\frac{\partial u}{\partial n_P^-}$、$\frac{\partial u}{\partial n_P^+}$ 都存在. 又函数 $u(M)$ 在区域 D^- 内调和，当点 M 趋于无穷远时，它一致趋于零，按假设，在 S 上 $\frac{\partial u}{\partial n_P^+}$ 恒等于零，因此，根据 Neumann 外问题解的唯一性定理[*]可知道，$u(M)$ 在区域 D^- 内恒等于零. 但是单层位势在全空间内是连续的函数，所以 $u(M)$ 当点 M 由区域 D^+ 内趋于 S 上时，它的极限也恒等于零. 又由于函数 $u(M)$ 在区域 D^+ 内是调和的，根据 Dirichlet 内问题的解的唯一性定理，它在 D^+ 内也恒等于零，因之，$\frac{\partial u}{\partial n_P^-}$ $(P\in S)$ 在 S 上也恒等于零.

由上节的定理 7.5，有

$$\frac{\partial u}{\partial n_P^+}-\frac{\partial u}{\partial n_P^-}=-4\pi\omega(P)\quad(P\in S),$$

因之，$\omega(P)$ 在 S 上恒等于零. 引理得证.

定理 7.6 *积分方程(7.27)和(7.30)对于任意右端 $-\frac{1}{2\pi}f_i(M)$ 和 $\frac{1}{2\pi}g_e(M)$ 存在着唯一的解.*

证明 根据 Fredholm 理论，只须证明对应于积分方程(7.27)和(7.30)的齐次方程只有零解就可以了. 今考察(7.30)的齐次积分方程

---

[*] 关于 Neumann 外问题和 Dirichlet 内问题的解的唯一性定理，在一般的《数学物理方程》教科书中可找到，例如可参阅[24]. 在证明唯一性定理时，还需对曲面 S 作进一步的假设：过 S 上任一点 P 都可作出一个和曲面 S 相切于点 P 的球，这个球全部落在区域 D^- 或 D^+ 的内部.

$$\omega(M)=-\frac{1}{2\pi}\iint_S \omega(P)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM},\ \boldsymbol{n}_M)}{r_{PM}^2}\mathrm{d}S_P, \qquad (7.31)$$

设 $\omega(P)$ 是它的一个连续解. 利用这个函数 $\omega(P)$ 作出一个以它为密度函数的单层位势 $u(M)$, 它沿曲面 S 的外法向导数, 按公式(7.16)的第一式就有

$$\frac{\partial u}{\partial n_M^+}=-\iint_S \omega(P)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM},\ \boldsymbol{n}_M)}{r_{PM}^2}\mathrm{d}S_P-2\pi\omega(M) \quad (M\in S),$$

根据(7.31)式, $\frac{\partial u}{\partial n_M^+}$ 应恒等于零, 于是由引理 **7.4** 知道, 在曲面 S 上, 我们有

$$\omega(M)=0.$$

这就是说, 齐次积分方程(7.31)只有零解. 因此, 非齐次积分方程(7.30)对任意的右端 $\frac{1}{2\pi}g_E(M)$ 有唯一的解.

又根据 Fredholm 理论, 积分方程(7.30)的共轭方程(7.27)对任意的右端 $-\frac{1}{2\pi}f_I(M)$ 也有唯一的解. 定理证毕.

这就证明了 Dirichlet 内问题和 Neumann 外问题都存在着解.

定理 7.7 *若不计常数因子, 积分方程(7.28)和(7.29)所对应的互为共轭的齐次积分方程*

$$\nu(M)=-\frac{1}{2\pi}\iint_S \frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM},\ \boldsymbol{n}_P)}{r_{PM}^2}\nu(P)\mathrm{d}S_P \qquad (7.32)$$

和

$$\omega(M)=\frac{1}{2\pi}\iint_S \frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PM},\ \boldsymbol{n}_M)}{r_{PM}^2}\omega(P)\mathrm{d}S_P \qquad (7.33)$$

各只有一个非零解.

证明 从上节定理 **7.4** 中的公式(7.13)可知道, 齐次积分方程(7.32)有解

$$\nu(M)=1.$$

因此, 根据 Fredholm 理论, 齐次积分方程(7.32)和(7.33)各至少

有一个非零解. 下面证明,齐次积分方程(7.33)只有一个非零解.

假设不然, 即假设齐次积分方程(7.33) 有两个线性无关的非零解 $\omega_1(P)$和 $\omega_2(P)$. 利用这两个函数,作单层位势

$$u_1(M)=\iint\limits_S \frac{\omega_1(P)}{r_{PM}}\,\mathrm{d}S_P \text{ 与 } u_2(M)=\iint\limits_S \frac{\omega_2(P)}{r_{PM}}\mathrm{d}P_P,$$

它们都在区域 D^+ 内调和, 在曲面 S 上的内法向导数 $\frac{\partial u_1}{\partial n^-}$、$\frac{\partial u_2}{\partial n^-}$ 根据(7.33)式都等于零,即

$$\frac{\partial u_j}{\partial n^-}=-\iint\limits_S \omega_j(P)\,\frac{\cos(r_{PM},\ n_M)}{r_{PM}^2}\mathrm{d}S_P+2\pi\omega_j(M)=0$$

$$(j=1,\ 2).$$

因之, 根据 Neumann 内问题的解的唯一性定理(例如, 可参阅[24]),在区域 D^++S 上, 函数 $u_1(M)$ 和 $u_2(M)$ 都是常数, 于是,可以选取到不同时为零的常数 C_1 和 C_2, 使在区域 D^++S 上有下式成立:

$$C_1u_1+C_2u_2=0.$$

考察单层位势

$$u(M)=C_1u_1(M)+C_2u_2(M)=\iint\limits_S \frac{C_1\omega_1(P)+C_2\omega_2(P)}{r_{PM}}\mathrm{d}S_P,$$

按上面所述,它在区域 D^++S 上恒等于零,而在区域 D^- 内, 由于这函数 $u(M)$在曲面 S 上等于零, 在 D^- 内调和, 在无穷远点一致趋于零,所以根据 Dirichlet 外问题的解的唯一性定理(例如,可参阅[24]),它在 D^- 内也恒等于零,从而有

$$\frac{\partial u}{\partial n_M^+}-\frac{\partial u}{\partial n_M^-}=-4\pi\left[C_1\omega_1(M)+C_2\omega_2(M)\right]=0\quad(M\in S),$$

即 $\omega_1(P)$和 $\omega_2(P)$成为线性相关的了. 这就导致了矛盾.

于是就证明了, 齐次积分方程(7.33)只有一个非零解. 再应用 Fredholm 理论, 就知道齐次积分方程(7.32) 也只有一个非零解. 定理得证.

定理 7.8 Neumann 内问题存在着解的充分和必要条件是:边界条件(7.21)中的函数 $g_1(M)$满足

$$\iint_S g_I(M)\mathrm{d}S_M=0.$$

证明 因为积分方程(7.28)所对应的齐次方程(7.32)的解(不计常数因子)只有一个，即 $\nu(M)=1$，所以，根据 Fredholm 理论，其共轭方程(7.29)有解的充分和必要条件是

$$\iint_S \frac{1}{2\pi}g_I(M)\cdot 1\mathrm{d}S_M=0,$$

即

$$\iint_S g_I(M)\mathrm{d}S_M=0.$$

定理得证。

同样地，利用 Fredholm 理论，应有如下的结论：积分方程(7.28)有解的充分和必要条件是：其右端函数 $\frac{1}{2\pi}f_E(M)$ 满足

$$\iint_S f_E(M)\tilde{\omega}(M)\mathrm{d}S_M=0, \tag{7.34}$$

其中 $\tilde{\omega}(M)$ 是其共轭齐次方程(7.33)的非零解。

乍看起来，由这个结论似乎可以说：Dirichlet 外问题仅当边界条件(7.20)中的函数 $f_E(M)$ 满足上列条件(7.34)时才能有解。其实不然，Dirichlet 外问题的解的存在性和积分方程(7.28)的解的存在性这两者并不是等价的，因为在得出积分方程(7.28)时，是假定了 Dirichlet 外问题的解用双层位势来表示的，但正如在上一节里曾指出过的，双层位势当点 M 趋于无穷远时，是以与 $\frac{1}{r_{OM}^2}$ 一样的阶数趋于零的，这里 O 是任意一个固定的点，而一般的在无穷远点一致趋于零的调和函数不一定具有这个性质。这样，实际上就对求 Dirichlet 外问题的解提出了过苛的要求，从而使求解发生了困难，这是由于采用位势求解所产生的方法性的困难。

因之，为了解 Dirichlet 外问题，不妨假设坐标原点 O 位在区域 D^+ 内，而把这个定解问题的解表为形式

$$u(M)=\frac{\alpha}{r_{OM}}+u_1(M), \tag{7.35}$$

这里 α 是待定常数，而 $u_1(M)$ 是具有待定连续密度函数 $\nu_1(P)$ 的双层位势

$$u_1(M)=\iint_S \nu_1(P)\ \frac{\cos(r_{PM},\ n_P)}{r_{PM}^2}\mathrm{d}S_P.$$

显然，函数 $u(M)$ 在区域 D^- 内调和，当点 M 趋于无穷远时，它一致趋于零．当点 M 从区域 D^- 内趋于曲面 S 上点 M_S 时，由(7.20)，应有

$$u_1|_S=f_B(M_S)-\frac{\alpha}{r_{OM_S}},$$

所以代替积分方程(7.24)，应有

$$\nu_1(M)=-\frac{1}{2\pi}\iint_S \nu_1(P)\frac{\cos(r_{PM},\ n_P)}{r_{PM}}\mathrm{d}S_P$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left[f_B(M)-\frac{\alpha}{r_{OM}}\right], \tag{7.36}$$

在上式中已将 M_S 简记为 M 了．根据 Fredholm 理论，上列积分方程(7.36)有解的充分和必要条件是

$$\frac{1}{2\pi}\iint_S\left[f_B(M)-\frac{\alpha}{r_{OM}}\right]\tilde{\omega}(M)\mathrm{d}S_M=0 \tag{7.37}$$

其中 $\tilde{\omega}(M)$ 是齐次积分方程(7.33)的非零解．

现在可选取适当的常数 α，使上面的条件(7.37)得以满足，将这样选得的常数 α 代入积分方程(7.36)，可解出函数 $\nu_1(P)$，从而可定出函数 $u_1(M)$，然后按照公式(7.35)就得出了 Dirichlet 外问题的解．这就证明了 Dirichlet 外问题对于任意的连续边值函数 $f_B(M)$ 都有解．

§3 实体杆的扭转

在杆的扭转理论中，我们取 z 轴的方向与杆的母线相平行，已知：应力分量 τ_{xz} 和 τ_{yz} 满足方程

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}=0. \tag{7.38}$$

以 u_x、u_y 和 u_z 分别表示杆关于 x 轴、y 轴和 z 轴的弹性位移分量，就有

$$u_x=-\theta yz+\alpha,\quad u_y=\theta xz+\beta,\quad \frac{\partial u_z}{\partial z}=0,$$

其中 θ、α、β 皆为常数，且 θ 的值与杆的扭转成正比. 又

$$\tau_{xz}=\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)=\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}-\theta y\right),$$

$$\tau_{yz}=\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\right)=\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\theta x\right),$$

于是得到关系式

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x}=-2\mu\theta. \tag{7.39}$$

这里的 μ 是常数.

设

$$\tau_{xz}=-\mu\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\theta y\right),\quad \tau_{yz}=\mu\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\theta x\right), \tag{7.40}$$

其中 $\varphi(x, y)$ 是新的（待定）函数，这样的 τ_{xz} 和 τ_{yz} 对任意的函数 φ 可满足方程(7.38)，将它们代入关系式(7.39)中，就可得出函数 φ 应满足

$$\Delta\varphi\equiv\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0,$$

即函数 $\varphi(x, y)$ 是在区域 D——杆与 xy 平面的相交部分——内的调和函数.

现求函数 φ 应满足的边界条件. 如果杆的侧面不受外力影响，则在杆的侧面上，也就是在区域 D 的境界上，应有

$$\tau_{xz}\cos(n, x)+\tau_{yz}\cos(n, y)=0,$$

其中 n 是杆的侧面的外法线. 把(7.40)式代入上式，得出

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(n, y)-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(n, x)=-\theta[x\cos(n, y)-y\cos(n, x)].$$

但是
$$\cos(n, x)=-\cos(s, y)=-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s};$$

$$\cos(n, y)=\cos(s, x)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s},$$

这里 s 是区域 D 的境界曲线的弧坐标. 因此, 有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=-\frac{1}{2}\theta\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial s},$$

对 s 积分, 即得到在区域 D 的境界上有

$$\varphi=-\frac{1}{2}\theta(x^2+y^2)+C \quad (C\text{ 为常数}). \tag{7.41}$$

因杆为实体, 所以 D 是单连通区域, (7.41)中的常数 C 可以任意取定.

这样一来, 调和函数 φ 是具有边界条件(7.41)的 Dirichlet 内问题的解.

§4 平面情形·例

对于平面上的 Laplace 方程, 以 D^+ 表示平面上的一个有界区域, 其境界 L 是有向光滑闭曲线, 它的正向是使区域 D^+ 位于其左边的方向. 称曲线积分

$$\tilde{u}(M)=\int_L\omega(A)\ln\frac{1}{r_{AM}}\,\mathrm{d}l_A,$$

$$\begin{aligned}u(M)&=\int_L\tau(A)\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r_{AM}}\right)\mathrm{d}l_A\\&=\int_L\tau(A)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{AM},\boldsymbol{n}_A)}{r_{AM}}\,\mathrm{d}l_A\end{aligned} \tag{7.42}$$

分别为平面单层位势和双层位势, 这里 n 是曲线 L 的外法线, $\boldsymbol{n}_A$ 是 L 上的点 A 处的外法线向量. 可以证明, 函数 $\tilde{u}(M)$ 与 $u(M)$ 当点 M 不位于曲线 L 上时都是调和的.

类似于空间的位势情形, 可以证明, 平面双层位势 $u(M)$ 在曲线 L 上有第一类间断

$$u_I(P)=u(P)-\pi\tau(P);$$
$$u_E(P)=u(P)+\pi\tau(P),$$

其中 $u_I(P)$ 和 $u_E(P)$ 分别表示上面的积分(7.42)当点 M 从 L 内部和外部趋于 L 上的点 P 时的极限, 而 $u(P)$ 是积分(7.42) 当点

M 在点 $P\in L$ 的值；同样可以证明，平面单层位势 $\tilde{u}(M)$ 的法向导数 $\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial n_P}$ 在曲线 L 上具第一类间断

$$\frac{\partial\tilde{u}(P)}{\partial n_P^+}=\int_L\omega(A)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PA},\ \boldsymbol{n}_P)}{r_{AP}}\,\mathrm{d}l_A-\pi\omega(P);$$

$$\frac{\partial\tilde{u}(P)}{\partial n_P^-}=\int_L\omega(A)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{PA},\ \boldsymbol{n}_P)}{r_{AP}}\,\mathrm{d}l_A+\pi\omega(P),$$

其中点 $P\in L$.

现在考虑确定在以光滑闭曲线 L 为境界的平面有界单连通区域 D 内的 Laplace 方程

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$$

适合边界条件

$$u|_L=f(P)\quad(P\in L)$$

的 Dirichlet 问题的求解，这里的 $f(P)$ 是给定在曲线 L 上的已知连续函数.

我们把上述所要求的 Dirichlet 问题的解用双层位势

$$u(M)=\int_L\tau(A)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{AM},\ \boldsymbol{n}_A)}{r_{AM}}\,\mathrm{d}l_A$$

表示，其中点 M 和点 A 分别位于区域 D 内和境界 L 上，$\boldsymbol{n}_A$ 是 L 上的点 A 处的外法线方向. 于是按上面所述，就得出关于待定密度函数 $\tau(A)$ 的积分方程

$$\tau(P)-\frac{1}{\pi}\int_L\tau(A)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{AP},\ \boldsymbol{n}_A)}{r_{AP}}\,\mathrm{d}l_A=-\frac{1}{\pi}f(P),\quad(7.43)$$

这里 P 是曲线 L 上的点.

1. 假设区域 D 是圆域 $x^2+y^2<R^2$. 这时见图 7.5，有

$$2R\cos(\boldsymbol{r}_{AP},\ \boldsymbol{n}_A)=-2R\cos\varphi=-r_{AP},$$

所以积分方程(7.43)可以写为

$$\tau(P)+\frac{1}{2\pi R}\int_L\tau(A)\,\mathrm{d}l_A=-\frac{1}{\pi}f(P).$$

这是一个退化核积分方程. 记

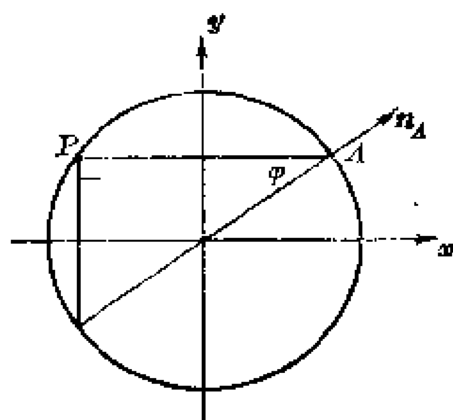


图 7.5

$$\int_L \tau(A)\,dl_A = C,$$

有 $\tau(P) = -\frac{1}{\pi}f(P) - \frac{C}{2\pi R}$,

两端沿曲线 L 积分,得

$$C = -\frac{1}{\pi}\int_L f(A)\,dl_A - C,$$

所以 $C = -\frac{1}{2\pi}\int_L f(A)\,dl_A$,

进而得出积分方程的解是

$$\tau(P) = -\frac{1}{\pi}f(P) + \frac{1}{4\pi^2 R}\int_L f(A)\,dl_A.$$

这样,在圆域的情形,就得出所求 Dirichlet 问题的解为

$$u(M) = -\frac{1}{\pi}\int_L f(A)\,\frac{\cos(\boldsymbol{r}_{AM},\ \boldsymbol{n}_A)}{r_{AM}}\,dl_A + \frac{1}{4\pi^2 R}\int_L f(A)\,dl_A\int_L \frac{\cos(\boldsymbol{r}_{A_1M},\ \boldsymbol{n}_{A_1})}{r_{A_1M}}\,dl_{A_1}.$$

但当点 $M \in D$ 时,有

$$\int_L \frac{\cos(\boldsymbol{r}_{A_1M},\ \boldsymbol{n}_{A_1})}{r_{A_1M}}\,dl_{A_1} = -2\pi,$$

所以 $u(M) = -\frac{1}{2\pi R}\int_L f(A)\left[1 + \frac{2R\cos(\boldsymbol{r}_{AM},\ \boldsymbol{n}_A)}{r_{AM}}\right]dl_A.$

又(见图 7.6)

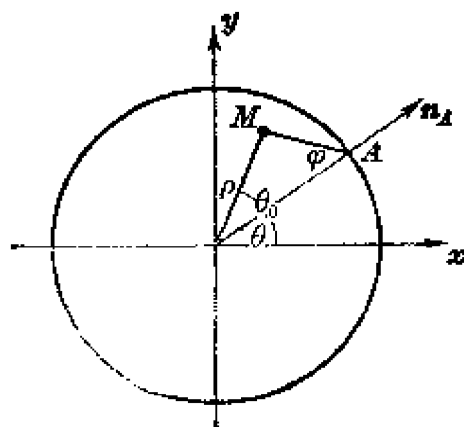


图 7.6

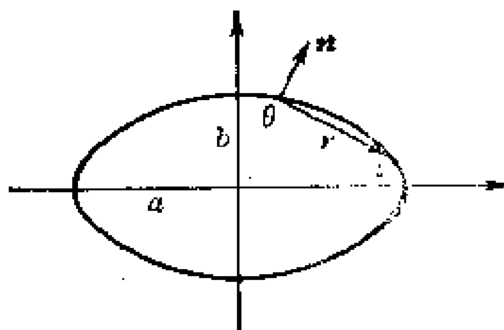


图 7.7

$$
=-\frac{1}{r_{AM}}\left[r_{AM}+2R\cos(\boldsymbol{r}_{AM},\ \boldsymbol{n}_A)\right]
$$

$$
=-\frac{1}{r_{AM}^2}(r_{AM}^2-2Rr_{AM}\cos\varphi),
$$

而
$$
\rho^2=r_{AM}^2+R^2-2Rr_{AM}\cos\varphi,
$$

这里 ρ 是原点 O 到点 M 的距离，于是，最后得到所求 Dirichlet 问题的解的下列表达式

$$
u(M)=\frac{1}{2\pi R}\int_L f(A)\frac{(R^2-\rho^2)\mathrm{d}l_A}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\theta_0)}
$$

$$
=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\frac{(R^2-\rho^2)\mathrm{d}\theta}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\theta_0)},
$$

上式中 θ 和 θ_0 分别是 $\overline{OA}$ 和 $\overline{OM}$ 同 x 轴的夹角．上列公式就是熟知的 Poisson 公式．

2．假设区域 D 是椭圆域，其境界 L 的参数方程是

$$
x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta\quad(0\leqslant\theta\leqslant2\pi).
$$

为简便起见，将曲线 L 上对应于参数 θ 和 t 的点 A 和点 P 记为 θ 和 t；将 $\boldsymbol{r}_{AP}$ 和 $\boldsymbol{n}_A$ 简记为 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{n}$．

先计算上面所得到的积分方程(7.43)的核，见图 7.7，有

$$
r^2=a^2(\cos t-\cos\theta)^2+b^2(\sin t-\sin\theta)^2
$$

$$
=4a^2\sin^2\left(\frac{t-\theta}{2}\right)\left[1-\varepsilon^2\cos^2\left(\frac{t+\theta}{2}\right)\right],
$$

其中 $\varepsilon^2=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 是椭圆的离心率．又

$$
\cos(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{n})\mathrm{d}l=[\cos(\boldsymbol{n},\ x)\cos(\boldsymbol{r},\ x)+\cos(\boldsymbol{n},\ y)\cos(\boldsymbol{r},\ y)]\mathrm{d}l,
$$

但是
$$
\mathrm{d}x=-\cos(\boldsymbol{n},\ y)\mathrm{d}l,\ \mathrm{d}y=\cos(\boldsymbol{n},\ x)\mathrm{d}l,
$$

所以有

$$
\cos(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{n})\mathrm{d}l=\cos(\boldsymbol{r},\ x)\mathrm{d}y-\cos(\boldsymbol{r},\ y)\mathrm{d}x
$$

$$
=\frac{1}{r}\left[a(\cos t-\cos\theta)\mathrm{d}y-b(\sin t-\sin\theta)\mathrm{d}x\right]
$$

$$
=\frac{ab}{r}\left[\cos\theta(\cos t-\cos\theta)+\sin\theta(\sin t-\sin\theta)\right]\mathrm{d}\theta
$$

$$= -\frac{2ab}{r}\sin^2\left(\frac{t-\theta}{2}\right)d\theta.$$

于是

$$\frac{\cos(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{n})}{r}dl = -\frac{2ab}{r^2}\sin^2\left(\frac{t-\theta}{2}\right)d\theta$$

$$= -\frac{b}{2a}\frac{d\theta}{1-\varepsilon^2\cos^2\left(\frac{t+\theta}{2}\right)}$$

$$= -\frac{b}{2a}\left[1+\varepsilon^2\cos^2\left(\frac{t+\theta}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\varepsilon^4\cos^4\left(\frac{t+\theta}{2}\right)+\cdots\right]d\theta.$$

现在假设椭圆的离心率 ε 很小，在上式右端方括号内仅取含有 ε^2 的项. 这样，就得到近似于积分方程(7.43)的具有退化核的积分方程

$$\tau(t)+\frac{b}{2a\pi}\int_0^{2\pi}\left[1+\varepsilon^2\cos^2\left(\frac{t+\theta}{2}\right)\right]\tau(\theta)d\theta = -\frac{1}{\pi}f(t).$$

用 $\frac{1}{2}[1+\cos(t+\theta)]$ 来代替 $\cos^2\left(\frac{t+\theta}{2}\right)$，上列退化核积分方程可写为

$$\tau(t)+\int_0^{2\pi}[\alpha+\beta\cos t\cos\theta-\beta\sin t\sin\theta]\tau(\theta)d\theta = f_0(t),$$

其中 $\quad \alpha=\frac{b}{2\pi a}\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2}\right),\ \beta=\frac{b\varepsilon^2}{2\pi a},\ f_0(t)=-\frac{1}{\pi}f(t).$

解此退化核积分方程，得

$$\tau(t)=f_0(t)-C_1-C_2\cos t-C_3\sin t,$$

其中

$$C_1=\alpha\int_0^{2\pi}\tau(\theta)d\theta,$$

$$C_2=\beta\int_0^{2\pi}\cos\theta\tau(\theta)d\theta,$$

$$C_3=-\beta\int_0^{2\pi}\sin\theta\tau(\theta)d\theta,$$

于是可以求得

$$C_1=\frac{f_1}{1+2\pi\alpha},\quad C_2=\frac{f_2}{1+\pi\beta},\quad C_3=\frac{f_3}{1-\pi\beta},$$

这里的

$$f_1=\alpha\int_0^{2\pi}f_0(t)\,\mathrm{d}t,\quad f_2=\beta\int_0^{2\pi}f_0(t)\cos t\,\mathrm{d}t,$$

$$f_3=-\beta\int_0^{2\pi}f_0(t)\sin t\,\mathrm{d}t,$$

从而就得到了所要求的积分方程(7.43)的近似解是

$$\tau(t)=f_0(t)-C_1-C_2\cos t-C_3\sin t.$$

如果在积分方程(7.43)的核的表达式中保留 s^2 的更高次幂的项，就可以求得这个积分方程的更精确的解. 也可以得出其真解，但它是用无穷级数形式表达的.

§5 Poisson 方程

根据第1节的公式(7.5)式

$$u(M)=-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{D^+}\frac{\Delta u}{r_{PM}}\,\mathrm{d}\Omega_P+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\frac{1}{r_{PM}}\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S_P$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{PM}}\right)\mathrm{d}S_P,$$

可以猜想在体 D^+ 上的空间质量分布的体位势

$$U(M)=-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{D^+}\frac{F(D)}{r_{PM}}\,\mathrm{d}\Omega_P$$

应是 Poisson 方程

$$\Delta u=F(x,\ y,\ z)\tag{7.44}$$

的一个特解. 事实确是如此，例如当函数 $F(x,\ y,\ z)$ 在区域 D^+ 内具有一阶连续偏导数时，就可以直接验证上述结论. 要知其详细情况，可参阅专著[25].

这样，对于 Poisson 方程(7.44)的各种边值问题的求解，总可以利用上述它的特解 $U(M)$ 化为 Laplace 方程的相应边值问题求解. 例如，若要在区域 D^+ 内求方程(7.44)的解 $u(M)$ 使在边界曲

面 S 上满足定解条件

$$u|_S=f,$$

可作代换

$$w=u-U,$$

以引进新的未知函数 w, 则函数 w 就满足 Laplace 方程, 在曲面 S 上所应满足的边界条件就是

$$w|_S=f-U|_S.$$

对后者, 可利用第二节所述方法求出 w, 从而也就可以得到原先 Poisson 方程的 Dirichlet 问题的解:

$$u=w+U.$$

特别是, 考虑 Poisson 方程(7.44)的齐次 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\Delta u=F(x,\ y,\ z),\ 点\ M(x,\ y,\ z)\in D^+,\\ u|_S=0.\end{cases} \tag{7.45}$$

假设已经知道方程 $\Delta u=0$ 关于区域 D^+ 的 Green 函数 $Z(M;M_1)$, 它是空间内两点 M 与 M_1 的对称函数, 具有形式

$$Z(M;M_1)=-\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{r_{MM_1}}+g(M;M_1),$$

其中 $g(M;M_1)$ 作为点 M 的函数, 在区域 D^+ 内调和, 在曲面 S 上满足条件

$$g\Big|_S=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{r_{MM_1}}\Big|_S.$$

则可证明边值问题(7.45)的解可以表为

$$u(M)=\iiint\limits_{D^+}Z(M;M_1)F(M_1)\mathrm{d}\Omega_{M_1}. \tag{7.46}$$

这个结论的证明过程, 可参阅[25].

§6 用位势方法解非线性边值问题

应用类似于前面的位势理论, 可以研究拟线性方程的边值问题. 这里所引进的研究方法是属于通常所称的连续性方法, 它在研究非线性边值问题时是一种颇有成效的方法. 下面的论述引自

文章[17].

设区域 D^+ 是由光滑闭曲面 S 所围成的有界区域.

考察下述边值问题：在区域 D^+ 内求二阶拟线性方程

$$\Delta u=F(x, y, z, u) \tag{7.47}$$

的正规解 $u(x, y, z)$，使之在边界曲面 S 上满足边界条件

$$u|_S=h. \tag{7.48}$$

这里 $F(x, y, z, u)$ 是4个变量的已知函数；h 是给定在曲面 S 上的已知连续函数.

对方程(7.47)中右端的函数 $F(x, y, z, u)$ 作如下假设：

1) 函数 $F(x, y, z, u)$ 在4维区域 $\mathbb{R}_4\{(x, y, z)\in D^++S, -\infty<u<+\infty\}$ 内关于4个变量 x, y, z, u 是连续的、有界的，并具有有界的一阶连续偏导数.

2) 在区域 $\mathbb{R}_4$ 内 $F'_u(x, y, z, u)\geqslant 0$；

3) 在区域 $\mathbb{R}_4$ 内，偏导数 $F''_{uu}(x, y, z, u)$ 存在、有界，且关于变量 u 满足 Lipschitz 条件：

$$|F''_{uu}(x, y, z, u_1)-F''_{uu}(x, y, z, u_2)|\leqslant L|u_1-u_2|,$$

其中 L 是正常数.

在这些假设下，我们证明非线性边值问题(7.47)与(7.48)的解是存在的，而且是唯一的.

定理7.9 在关于 $F(x, y, z, u)$ 的上述假设条件1)、2)、3)下，边值问题(7.47)与(7.48)的解必是唯一的.

证明 设边值问题(7.47)与(7.48)存在两个解 $u_1(x, y, z)$ 和 $u_2(x, y, z)$，要证明，在区域 D^+ 内有下式成立：

$$u_1(x, y, z)=u_2(x, y, z).$$

事实上，记

$$u(x, y, z)=u_1(x, y, z)-u_2(x, y, z),$$

则函数 $u(x, y, z)$ 满足方程

$$\Delta u=F(x, y, z, u_1)-F(x, y, z, u_2) \quad ((x, y, z)\in D^+) \tag{7.49}$$

以及在边界曲面 S 上的边界条件

$$u|_S=0. \tag{7.50}$$

对方程(7.49)的右端应用微分中值定理,得

$$\begin{aligned}\Delta u &= F(x, y, z, u_1) - F(x, y, z, u_2)\\ &= F'_u(x, y, z, u_2(x, y, z) + \theta[u_1(x, y, z)\\ &\quad - u_2(x, y, z)])u\\ &= \tilde{F}(x, y, z)u,\end{aligned}$$

在上式中已记

$$\tilde{F}(x, y, z) = F'_u(x, y, z, u_2(x, y, z) + \theta[u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)]) \quad (0<\theta<1).$$

作积分
$$\iiint\limits_{D^+} u(\Delta u - \tilde{F}u)\,\mathrm{d}\Omega,$$

由于被积函数为零,故此积分应为零. 另一方面,利用 Green 公式,有

$$\iiint\limits_{D^+} u\Delta u\,\mathrm{d}\Omega = -\iiint\limits_{D^+}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}\Omega + \iint\limits_{S} u\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S,$$

其中 n 是曲面 S 的外法线. 注意到函数 u 满足边界条件(7.50),上式右端第二项面积分应为零,从而得到

$$0 = \iiint\limits_{D^+} u(\Delta u - \tilde{F}u)\,\mathrm{d}\Omega = -\iiint\limits_{D^+}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \tilde{F}u^2\right]\mathrm{d}\Omega.$$

按照关于 F 的假设条件 2),在区域 D^+ 内 $\tilde{F}\geqslant 0$,于是由上面的等式得出:在区域 D^+ 内应有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

从而 $u=$常数. 但在边界曲面 S 上 $u=0$,所以这常数应等于零. 这就得出在区域 D^+ 内

$$u(x, y, z) = 0.$$

唯一性得证.

现在，在关于 F 的上述假设条件下证明边值问题(7.47)、(7.51)在有界函数类内的正规解是存在的.

不失一般性，不妨假设边界条件(7.48)中的函数 $h=0$. 这是因为，可以先用前面§2中的方法作出边值问题

$$\begin{cases} \Delta v=0 & (\text{在 } D^+ \text{ 内}), \\ v|_S=h \end{cases}$$

的解 v，然后记 $w=u-v$，则函数 w 应满足方程

$$\Delta w=F(x, y, z, w+v) \quad (\text{在 } D^+ \text{ 内})$$

及齐次边界条件

$$w|_S=0.$$

而这里的 $F(x, y, z, w+v)$ 当然仍满足对 $F(x, y, z, u)$ 的诸假设条件.

下面在有界函数类内讨论边值问题

$$\begin{cases} \Delta u=F(x, y, z, u)=F(M; u) & (\text{在 } D^+ \text{ 内}), \quad (7.47) \\ u|_S=0, & \quad (7.51) \end{cases}$$

这里已用 M 表示点(x, y, z)，建立这个边值问题的解的存在性.

以 $Z(M, M_1)$ 表示方程 $\Delta u=0$ 关于区域 D^+ 的 Green 函数，按前面所述，只要边界曲面 S 适当光滑，Green 函数总是存在的.

考虑具有参数 λ 的方程

$$\Delta u=\lambda F(M; u) \quad (0\leqslant\lambda\leqslant 1; \text{在 } D^+ \text{ 内}) \qquad (7.52)$$

在边界条件(7.51)下的求解问题. 若能证明边值问题 (7.52) 与 (7.51)在有界函数类内当 $\lambda=1$ 时有解，结论就得证了.

由上节所述，注意到公式(7.46)，不难验证，边值问题(7.52)与(7.51)对于任意参数值 λ 的求解等价于非线性积分方程

$$u(M)=\lambda\iiint\limits_{D^+} Z(M; M_1)F(M; u(M_1))\,d\Omega_{M_1} \qquad (7.53)$$

的求解. 这个非线性积分方程 (7.53) 属于 Hammerstein 型积分方程.

在此应指出，边值问题 (7.52) 与 (7.51) 的解 $u_\lambda(M)$ 若存在$(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$，它必是有界的. 这是因为，边值问题(7.52)与(7.51)的

求解等价于积分方程(7.53)的求解，而后者的任何解 $u_\lambda(M)$ 对于任意的值 $\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant1)$ 都是有界的. 事实上，按对函数 $F(M;u)$ 的假设条件 1)，有

$$|F(M;u)|\leqslant A,$$

A 是正常数，于是由(7.53)式得

$$\begin{aligned}|u_\lambda(M)|&\leqslant\lambda\iiint_{D^+}|Z(M;\ M_1)F(M_1;\ u_\lambda(M_1))|\,d\Omega_{M_1}\\&\leqslant A\iiint_{D^-}|Z(M;\ M_1)|\,d\Omega_{M_1}\leqslant\widetilde{A},\end{aligned}$$

这里 $\widetilde{A}$ 是正常数. 因而确实可以在有界函数类内求解边值问题(7.52)与(7.51).

边值问题(7.52)与(7.51)当 $\lambda=0$ 时有明显的唯一解 $u_0=0$，如果假设它对于某个值 $\lambda=\lambda_1(0<\lambda_1<1)$ 有解 $u_{\lambda_1}(M)$，而我们能够证明存在着某个常数 $\nu(0<\nu<1)$，它与 λ_1 无关，使边值问题(7.52)与(7.51)对于值 $\lambda=\lambda_1+\nu$ 也有解 $u_{\lambda_1+\nu}(M)$. 这样，从 $\lambda=0$ 时的边值问题(7.52)与(7.51)有解 $u_0(M)$ 出发，经过有限步后，就可以得到当 $\lambda=1$ 时边值问题(7.52)与(7.51)有解，即原先的边值问题(7.47)与(7.15)有解. 这种论证方法，就是所谓连续性方法.

现在假设边值问题(7.52)与(7.51)当 $\lambda=\lambda_1<1$ 时有解 $u_{\lambda_1}(M)$:

$$\begin{cases}\Delta u_{\lambda_1}=\lambda_1F(M;u_{\lambda_1})\quad(\text{在 } D^+ \text{ 内}),\\u_{\lambda_1}|_S=0,\end{cases}\tag{7.54}$$

下面证明，必存在常数 $\nu\ (0<\nu<1)$，它与 λ_1 无关，使边值问题(7.52)与(7.51)当 $\lambda=\lambda_1+\nu$ 时也有解 $u_{\lambda_1+\nu}(M)$ 存在:

$$\begin{cases}\Delta u_{\lambda_1+\nu}=(\lambda_1+\nu)F(M;\ u_{\lambda_1+\nu})\quad(\text{在 } D^+ \text{ 内}),\\u_{\lambda_1+\nu}|_S=0\end{cases}\tag{7.55}$$

为此，若能证明边值问题

$$\begin{cases}\Delta w=(\lambda_1+\nu)F(M;\ w+u_{\lambda_1})-\lambda_1F(M;\ u_{\lambda_1})\quad(\text{在 } D^+ \text{ 内}),\\w|_S=0\end{cases}\tag{7.56}$$

对于某个值 $\nu\ (0<\nu<1)$ 有解 $w(M)$，则边值问题(7.55)的解

$u_{\lambda_1+\nu}(M)$ 也存在，且有

$$u_{\lambda_1+\nu}(M)=w(M)+u_{\lambda_1}(M).$$

这是容易直接验证的.

现在就来讨论边值问题(7.56)的求解. 这个边值问题中的方程可写为

$$\Delta w=\nu F(M;u_{\lambda_1})+(\lambda_1+\nu)\left[F'_u(M;u_{\lambda_1})w\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}F''_{uu}(M;\ u_{\lambda_1}+\theta w)w^2\right],$$

式中 $0<\theta<1$. 于是由公式(7.53)得知，边值问题 (7.56) 的求解等价于非线性积分方程

$$w(M)=\iiint\limits_{D^+}Z(M;\ M_1)\left[\nu F(M_1;\ u_{\lambda_1}(M_1))\right.$$
$$+(\lambda_1+\nu)F'_u(M_1;\ u_{\lambda_1}(M_1))w(M_1)$$
$$+\frac{\lambda_1+\nu}{2}F''_{uu}(M_1;\ u_{\lambda_1}(M_1)$$
$$\left.+\theta w(M_1))w^2(M_1)\right]\mathrm{d}\Omega_{M_1}$$

的求解，后者又可写成

$$w(M)-(\lambda_1+\nu)\iiint\limits_{D^+}Z(M;M_1)F'_u(M_1;u_{\lambda_1}(M_1))w(M_1)\mathrm{d}\Omega_{M_1}$$
$$=\nu\iiint\limits_{D^+}Z(M;M_1)F(M_1;u_{\lambda_1}(M_1))\mathrm{d}\Omega_{M_1}$$
$$+\frac{\lambda_1+\nu}{2}\iiint\limits_{D}Z(M;M_1)F''_{uu}(M_1;\ u_{\lambda_1}(M_1)$$
$$+\theta w(M_1))w^2(M_1)\mathrm{d}\Omega_{M_1}. \tag{7.57}$$

因此，只要证明非线性积分方程(7.57)对某个确定值 $\nu(0<\nu<1)$ 有解 $w(M)$，那末也就证明了边值问题(7.56)有解，从而就能得出边值问题(7.55)的解 $u_{\lambda_1+\nu}(M)$ 了.

考察齐次积分方程

$$w(M)=(\lambda_1+\nu)\iiint\limits_{D^+}Z(M;M_1)F'_u(M_1;u_{\lambda_1}(M_1))w(M_1)\mathrm{d}\Omega_{M_1}, \tag{7.58}$$

它等价于边值问题

$$\begin{cases}\Delta w=(\lambda_1+\nu)F'_u(M;\ u_{\lambda_1}(M))w, \text{在 } D^+ \text{ 内},\\ w|_S=0.\end{cases}$$

由于假设 $F'_u\geqslant 0$, 而 $\lambda_1+\nu>0$, 所以由前面定理7.9所述, 这个边值问题只有零解, 因之, 积分方程(7.58)只有唯一的解 $w=0$, 或者说, 值 $\lambda_1+\nu$ 对于任意的 $\nu(0<\nu<1)$ 都不能是核 $Z(M;\ M_1)\times F'_u(M_1;\ u_{\lambda_1}(M_1))$的特征值, 从而解核 $\Gamma(M;\ M_1;\ \lambda_1+\nu)$存在. 于是, 非线性积分方程(7.57)的求解可化为与其等价的积分方程

$$\begin{aligned}w(M)=&\nu\iiint_{D^+}Z(M;M_1)F(M_1;\ u_{\lambda_1}(M_1))\mathrm{d}\Omega_{M_1}\\ &+\frac{\lambda_1+\nu}{2}\iiint_{D^+}Z(M;M_1)F''_{uu}(M_1;\ u_{\lambda_1}(M_1)\\ &+\theta w(M_1))w^2(M_1)\mathrm{d}\Omega_{M_1}\\ &+(\lambda_1+\nu)\iiint_{D^+}\Gamma(M;M_2;\ \lambda_1+\nu)\Big[\nu\iiint_{D^+}Z(M_2;M_1)\\ &\times F(M_1;\ u_{\lambda_1}(M_1))\mathrm{d}\Omega_{M_1}\\ &+\frac{\lambda_1+\nu}{2}\iiint_{D^+}Z(M_2;\ M_1)F''_{uu}(M_1;\ u_{\lambda_1}(M_1)\\ &+\theta w(M_1))w^2(M_1)\mathrm{d}\Omega_{M_1}\Big]\mathrm{d}\Omega_{M_2}\end{aligned}\qquad(7.59)$$

的求解了. 在上式右端中交换积分次序, 就可把它改写为

$$\begin{aligned}&\nu\iiint_{D^+}F(M_1;u_{\lambda_1}(M_1))[Z(M;M_1)+(\lambda_1+\nu)\iiint_{D^+}\Gamma(M;\ M_2;\\ &\lambda_1+\nu)Z(M_2;M_1)\mathrm{d}\Omega_{M_2}]\mathrm{d}\Omega_{M_1}\\ &+\frac{\lambda_1+\nu}{2}\iiint_{D^-}F''_{uu}(M_1;\ u_{\lambda_1}(M_1)+\theta w(M_1))\Big[Z(M;\ M_1)\\ &+(\lambda_1+\nu)\iiint_{D^+}\Gamma(M;M_2;\ \lambda_1+\nu)Z(M_2;\ M_1)\mathrm{d}\Omega_{M_2}\Big]\\ &\times w^2(M_1)\mathrm{d}\Omega_{M_1},\end{aligned}$$

若记

$$X(M;M_1;\lambda_1+\nu)=Z(M;\ M_1)$$
$$+(\lambda_1+\nu)\iiint\limits_{D^+}\Gamma(M;M_2;\lambda_1+\nu)Z(M_2;M_1)\mathrm{d}\Omega_{M_2}$$

则上面的积分方程(7.59)就可写成如下形式:

$$w(M)=\nu\iiint\limits_{D^+}F(M_1;\ u_{\lambda_1}(M_1))X(M;\ M_1;\ \lambda_1+\nu)\mathrm{d}\Omega_{M_1}$$
$$+\frac{\lambda_1+\nu}{2}\iiint\limits_{D^+}F''_{uu}(M_1;\ u_{\lambda_1}(M_1)+\theta w(M_1))$$
$$\times X(M;M_1;\lambda_1+\nu)w^2(M_1)\mathrm{d}\Omega_{M_1}. \qquad (7.60)$$

这样一来, 为了证明非线性积分方程(7.57) 对某个确定的值 $\nu(0<\nu<1)$ 有解, 只要证明与其等价的非线性积分方程(7.60)对于某个确定的值 $\nu(0<\nu<1)$ 确实存在着解 $w(M)$ 就可以了.

下面,我们就来讨论非线性积分方程(7.60),利用逐次逼近法证明对于某个确定的值 $\nu(0<\nu<1)$,它确实存在着解 $w(M)$.

前面已证明了: 任意值 $\lambda=\lambda_1+\nu$ $(0\leqslant\nu\leqslant1)$ 都不可能是核 $Z(M;M_1)F'_u(M_1;u_{\lambda_1}(M_1))$ 的特征值, 所以解核 $\Gamma(M;M_1;\lambda)$ 对于参数 λ 是 $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 上的连续函数. 事实上, 由于解核 $\Gamma(M;M_1;\lambda)$ 可表为

$$\Gamma(M;M_1;\ \lambda)=\frac{D(M;\ M_1;\ \lambda)}{D(\lambda)}, \qquad (7.61)$$

其中 $D(\lambda)$ 和 $D(M;M_1;\lambda)$ 分别是核 $Z(M;M_1)F'_u(M_1;\ u_{\lambda_1}(M_1))$ 的 Fredholm 分母和 Fredholm 一阶子式,它们皆为 λ 的整函数, 因之, 解核 $\Gamma(M;\ M_1;\ \lambda)$ 对于参数 λ 可能出现的不连续点只能是使 $D(\lambda)=0$ 的那些 λ 值, 而使 $D(\lambda)=0$ 的 λ 值就是核 $Z(M;M_1)\times F'_u(M_1;u_{\lambda_1}(M_1))$ 的特征值. 但正如上面已指出过的, 任意值 $\lambda=\lambda_1+\nu$, $0\leqslant\nu\leqslant1$ 都不可能是核 $Z(M;M_1)F'_u(M_1;u_{\lambda_1}(M_1))$ 的特征值, 就是说, 对任意的值 $\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant1)$ 都应有 $D(\lambda)\neq0$. 这样, 从式(7.61)知道, 解核 $\Gamma(M;\ M_1;\ \lambda)$ 对于参数 λ 是区间 $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 上的连续函数.

现在对于非线性积分方程(7.60), 利用逐次逼近法来求其解.

令零次近似为

$$w^{(0)}(M)=\nu\iiint\limits_{D^+}F(M_1;\ u_{\lambda_1}(M_1))X(M;\ M_1;\ \lambda_1+\nu)\mathrm{d}\Omega_{M_1},$$

有了第 $k-1$ 次近似 $w^{(k-1)}(M)$ 后，按下列等式确定第 k 次近似 $w^{(k)}(M)$：

$$\begin{aligned}w^{(k)}(M)=&\nu\iiint\limits_{D^+}F(M_1;\ u_{\lambda_1}(M_1))X(M;\ M_1;\ \lambda_1+\nu)\mathrm{d}\Omega_{M_1}\\&+\frac{\lambda_1+\nu}{2}\iiint\limits_{D^+}F''_{uu}(M_1;\ u_{\lambda_1}(M_1)+\theta w^{(k-1)}(M_1))\\&\times X(M;\ M_1;\ \lambda_1+\nu)[w^{(k-1)}(M_1)]^2\mathrm{d}\Omega_{M_1}\\&\quad(0<\theta<1;\ k=1,\ 2,\ \cdots).\end{aligned}$$

下面证明，由此得到的近似解序列 $\{w^{(k)}(M)\}$ 在区域 D^+ 内一致有界，而且一致收敛.

首先证明函数序列 $\{w^{(k)}(M)\}$ 在区域 D^+ 内一致有界. 事实上，由假设，$|F(M;\ u)|\leqslant A$；又由于对区域 D^+ 内的任何点 M，解核 $\Gamma(M;\ M_1;\ \lambda_1+\nu)$ 关于 $0\leqslant\lambda_1+\nu\leqslant1$ 是连续函数，所以存在与值 λ_1、ν 无关的正常数 B，使下式成立：

$$\iiint\limits_{D^+}|X(M;\ M_1;\ \lambda_1+\nu)|\mathrm{d}\Omega_{M_1}\leqslant B.$$

于是

$$\begin{aligned}|w^{(0)}(M)|\leqslant&\nu\iiint\limits_{D^+}|F(M_1;u_{\lambda_1}(M_1))X(M;\ M_1;\ \lambda_1+\nu)|\mathrm{d}\Omega_{M_1}\\\leqslant&\nu AB<\tau,\end{aligned}$$

τ 是正常数. 又

$$\begin{aligned}|w^{(1)}(M)|\leqslant&\nu\iiint\limits_{D^+}|F(M_1;u_{\lambda_1}(M_1))X(M;M_1;\ \lambda_1+\nu)|\mathrm{d}\Omega_{M_1}\\&+\frac{\lambda_1+\nu}{2}\iiint\limits_{D^+}|F''_{uu}(M_1;\ u_{\lambda_1}(M_1)+\theta w^{(0)}(M_1))\\&\times X(M;\ M_1;\ \lambda_1+\nu)|[w^{(0)}(M_1)]^2\mathrm{d}\Omega_{M_1}\\\leqslant&\nu AB+B_1\tau^2,\end{aligned}$$

其中 $B_1=A_1E$，而正常数 A_1 是函数 $F''_{uu}(M;\ u)$ 的绝对值在区域 $\mathcal{R}_4$ 内的界，即

$$|F''_{uu}(M;\ u)|\leqslant A_1.$$

我们如此选择正常数 τ，使

$$\nu AB+B_1\tau^2=\tau.$$

这样的 τ 是必定能找到的，因为可先选取 ν 适当地小，使

$$4\nu BAB_1<1,$$

然后，就能算出所欲选择的正常数 τ 可取为

$$\tau=\frac{1}{2B_1}\left(1-\sqrt{1-4\nu BAB_1}\right).$$

这样，就有 $$|w^{(1)}(M)|\leqslant\tau.$$

依此继续下去，应用数学归纳法就可得出，对任意的自然数 k，有

$$|w^{(k)}(M)|\leqslant\nu AB+B_1\tau^2=\tau\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),$$

从而证明了函数序列$\{w^{(k)}(M)\}$在区域 D^+ 内的一致有界性.

其次，我们证明函数序列 $\{w^{(k)}(M)\}$ 在区域 D^+ 内一致收敛. 为此，只要证明级数

$$w^{(0)}(M)+\sum_{k=0}^{\infty}[w^{(k+1)}(M)-w^{(k)}(M)] \tag{7.62}$$

在区域 D^+ 内一致收敛和绝对收敛. 估计级数(7.62)的一般项

$$\begin{aligned}
&|w^{(k+1)}(M)-w^{(k)}(M)|\\
&=\Bigg|\frac{\lambda_1+\nu}{2}\iiint_{D^+}\{F''_{uu}(M_1;u_{\lambda_1}(M_1)+\theta w^{(k)}(M_1))[w^{(k)}(M_1)]^2\\
&\quad-F''_{uu}(M_1;u_{\lambda_1}(M_1)+\theta w^{(k-1)}(M_1))[w^{(k-1)}(M_1)]^2\}\\
&\quad\times X(M;\ M_1;\lambda_1+\nu)\mathrm{d}\Omega_{M_1}\Bigg|\\
&\leqslant\iiint_{D^+}|X(M;\ M_1;\lambda_1+\nu)|\cdot|F''_{uu}(M_1;\ v_{\lambda_1}(M_1)+\theta w^{(k)}(M_1))\\
&\quad\times[w^{(k)}(M_1)]^2-F''_{uu}(M_1;\ u_{\lambda_1}(M_1)+\theta w^{(k-1)}(M_1))\\
&\quad\times[w^{(k-1)}(M_1)]^2|\mathrm{d}\Omega_{M_1},
\end{aligned}$$

但是

$$
\begin{aligned}
&|F'''_{uu}(M_1; u_{\lambda_1}(M_1)+\theta w^{(k)}(M_1))[w^{(k)}(M_1)]^2 \\
&\quad -F'''_{uu}(M_1; u_{\lambda_1}(M_1)+\theta w^{(k-1)}(M_1))[w^{(k-1)}(M_1)]^2| \\
&=|F''_{uu}(M_1; u_{\lambda_1}(M_1)+\theta w^{(k)}(M_1))\{[w^{(k)}(M_1)]^2 \\
&\quad -[w^{(k-1)}(M_1)]^2\}+[F''_{uu}(M_1; u_{\lambda_1}(M_1)+\theta w^{(k)}(M_1)) \\
&\quad -F''_{uu}(M_1; u_{\lambda_1}(M_1)+\theta w^{(k-1)}(M_1))][w^{(k-1)}(M_1)]^2| \\
&\leqslant |F''_{uu}(M_1; u_{\lambda_1}(M_1)+\theta w^{(k)}(M_1))|\cdot|w^{(k)}(M_1) \\
&\quad +w^{(k-1)}(M_1)|\cdot|w^{(k)}(M_1)-w^{(k-1)}(M_1)| \\
&\quad +L\theta[w^{(k-1)}(M_1)]^2|w^{(k)}(M_1)-w^{(k-1)}(M_1)| \\
&\leqslant 2\tau A_1|w^{(k)}(M_1)-w^{(k-1)}(M_1)| \\
&\quad +L\tau^2|w^{(k)}(M_1)-w^{(k-1)}(M_1)|,
\end{aligned}
$$

这里，我们利用了函数 $F''_{uu}(M; u)$ 关于变量 u 满足 Lipschitz 条件的假设以及 $0<\theta<1$. 这样，就有

$$
\begin{aligned}
|w^{(k+1)}(M)-w^{(k)}(M)| &\leqslant (2\tau A_1+L\tau^2)B\max_{M\in D^++S}|w^{(k)}(M) \\
&\quad -w^{(k-1)}(M)|.
\end{aligned}
$$

由显然的不等式 $\tau\leqslant\dfrac{1}{2B_1}$，所以又有

$$
\begin{aligned}
&|w^{(k+1)}(M)-w^{(k)}(M)| \\
&\quad\leqslant B_2\tau\max_{M\in D^++S}|w^{(k)}(M)-w^{(k-1)}(M)|,
\end{aligned}
$$

其中

$$
B_2=2A_1B+\frac{LB}{2B_1}.
$$

于是可递推得出

$$
\begin{aligned}
&|w^{(k+1)}(M)-w^{(k)}(M)| \\
&\quad\leqslant (B_2\tau)^k\max_{M\in D^++S}|w^{(1)}(M)-w^{(0)}(M)|.
\end{aligned}
$$

若我们能验证此时 $B_2\tau<1$ 成立，那么级数 (7.62) 的一致收敛性和绝对收敛性就得以证实了.

现在来说明，如何能保证 $B_2\tau<1$? 显然

$$
B_2>2A_1B=2B_1.
$$

欲使 $B_2\tau<1$，即

$$
\frac{B_2}{2B_1}\left(1-\sqrt{1-4\nu BAB_1}\right)<1,
$$

或 $$1-\sqrt{1-4\nu BAB_1}<\frac{2B_1}{B_2},$$

就应有 $$\sqrt{1-4\nu BAB_1}<\frac{B_2-2B_1}{B_2}.$$

将上面的不等式两边平方，由于 $B_2-2B_1>0$，不等号仍保持，我们有

$$1-4\nu BAB_1>\frac{(B_2-2B_1)^2}{B_2^2},$$

稍加整理，得

$$4\nu BAB_1<4\frac{B_1(B_2-B_1)}{B_2^2},$$

从而应有 $$\nu<\frac{B_2-B_1}{BAB_2^2}.$$

综上所述，我们只要选取

$$0<\nu<\min\left(\frac{1}{4BAB_1},\ \frac{B_2-B_1}{BAB_2^2},\ 1\right)=\nu^* \tag{7.63}$$

就可以了，这里 ν^* 是与 λ_1 无关的正常数.

这样，逐次近似序列$\{w^{(k)}(M)\}$在区域 D^+ 内一致地收敛于某个函数 $w(M)$，它就是非线性积分方程(7.60)的解，并且显然有

$$|w(M)|\leqslant\tau,\ M\in D^+.$$

至此，我们就证明了，若边值问题(7.54)有解，那末边值问题(7.55)对于满足不等式(7.63)的任意 ν 值也存在着解.

回到边值问题 (7.52) 与 (7.51)，我们从它当 $\lambda=0$ 时有解 $u_0(M)=0$ 出发，利用上面已证明的结果，就知道对某个 $\lambda=\nu_1<\nu^*$，边值问题(7.52)与(7.51) 也有解. 把数 ν_1 作为 λ_1，得到边值问题 (7.52) 与 (7.51) 对于 $\lambda=\lambda_1+\nu_2$ 也有解，这里 ν_2 是满足不等式(7.63)的某个正数，如此重复这种讨论有限次，可直到 $\lambda=1$ 时边值问题(7.52)与(7.51)有解存在. 这样，就达到了目的. 这样一来，我们就建立了原先边值问题(7.47)与(7.51) 的解的存在性，即证明了下述的定理:

定理 7.10 *在关于函数 $F(x, y, z, u)$ 的前述假设条件 1)、2)、3) 下，边值问题(7.47)与(7.51)在有界函数类内的正规解是存*

在的，它可利用连续性方法和逐次逼近法得到.

在此还需指出，对方程(7.47)右端的函数 $F(M;\ u)$所作的假设 2)只是为保证边值问题(7.47) 与 (7.48) 的解是唯一的一个充分条件，它可以代以其它条件，只须能保证边值问题 (7.47) 与 (7.48)的解的唯一性就可以了.

在前面几节中，利用积分方程理论来研究偏微分方程特别是椭圆型方程是一种经典的重要方法. 正如在前面几节的论述中已经看到的，这种方法不仅能给出定解问题的解的存在性证明，而且也能给出计算近似解的可能性. 在两个自变量的情形，用积分方程的方法同函数论的方法相结合，更大大地促进了对椭圆型方程各类问题的研究，得到了一系列的有意义的研究成果，这些成果，既有理论价值，又有不少实际应用. 对此有兴趣的读者，可参阅专著[26]、[27]、[28]、[29]等，在这些专著末尾都附有大量的现代参考文献.

§7　分离变量法的理论基础

在解数学物理的某些问题时，分离变量法(也称为 Fourier 方法)的应用必然导致如下所述的含参数 λ 的常微分方程的边值问题: 求参数 λ 的值，使得齐次方程

$$C(x)X''+E(x)X'+F_2(x)X-\lambda X=0 \qquad (7.64)$$

在有限区间 $[a,\ b]$ 上存在不恒等于零的解，在这个区间的端点满足齐次边值条件

$$\begin{aligned} A_0X(a)+B_0X'(a)=0,\\ A_1X(b)+B_1X'(b)=0, \end{aligned} \qquad (7.65)$$

其中 $C(x)$、$E(x)$ 和 $F_2(x)$ 都是区间$[a,\ b]$上的已知连续函数，且 $C(x)\leqslant C_0<0$，C_0 是常数；又 A_0，B_0，A_1，B_1 都是给定的常数，且 $A_0^2+B_0^2\neq0$，$A_1^2+B_1^2\neq0$.

使边值问题(7.64)与(7.65) 有非零解的 λ 值，称为这个问题的特征值；相应于这个特征值的非零解称为特征函数. 这个边值

问题通常称为 Sturm-Liouville 问题，我们简记为 $S-L$ 问题.

方程(7.64)在乘上 x 的一个适当函数后，可以写成形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right]-q(x)X(x)+\lambda\rho(x)X(x)=0. \qquad (7.66)$$

事实上，以函数 $\rho(x)$ 乘上方程(7.64)，得

$$\rho CX''+\rho EX'+\rho F_2X-\lambda\rho X=0,$$

为把上式左面第一、二项合写成 $[p(x)X']'$，必须有

$$(\rho C)'=\rho E,$$

这是关于函数 $\rho(x)$ 的一阶线性常微分方程，于是可定出

$$\rho(x)=\exp\int_{x_0}^{x}\frac{E-C'}{C}\,\mathrm{d}x>0.$$

记 $\rho C=-p(x)$，$\rho F_2=q(x)$，即可把方程 (7.64) 写成 (7.66) 的形式，且易得知，在区间 $[a,\ b]$ 上，$p(x)$ 与 $q(x)$ 都是连续函数，$p(x)\geqslant p_0>0$，$\rho(x)\geqslant\rho_0>0$，这里 p_0 与 ρ_0 都是常数.

现在考虑 $S-L$ 问题：求方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right]-q(x)X(x)+\lambda\rho(x)X(x)=0,\ x\in[a,\ b] \qquad (7.66)$$

的非零解 $X(x)$，使满足端点边值条件

$$\begin{aligned}A_0X(a)+B_0X'(a)=0,\\ A_1X(b)+B_1X'(b)=0.\end{aligned} \qquad (7.65)$$

在此假设 $p(x)$、$p'(x)$、$q(x)$ 和 $\rho(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上都是连续函数，$p(x)\geqslant p_0>0$，p_0 是常数，$\rho(x)\geqslant\rho_0>0$，ρ_0 是常数，而常数 A_0、B_0、A_1、B_1 满足 $A_0^2+B_0^2\neq0$，$A_1^2+B_1^2\neq0$.

这个边值问题具有下述的重要性质：

1) 对应同一特征值 λ 的特征函数 $X(x)$ 除常数因子外是唯一确定的.

事实上，设对应同一特征值 λ 有两个特征函数 $X_1(x)$ 与 $X_2(x)$，下面证明它们在区间 $[a,\ b]$ 上必是线性相关的.

由于函数 $X_1(x)$ 与 $X_2(x)$ 都满足边值条件(7.65)，我们有

$$A_0X_1(a)+B_0X_1'(a)=0,$$
$$A_0X_2(a)+B_0X_2'(a)=0,$$
而 A_0 与 B_0 不能同时为零，所以必须有
$$\begin{vmatrix} X_1(a) & X_1'(a) \\ X_2(a) & X_2'(a) \end{vmatrix}=0,$$
就是说，方程 (7.66) 的解 $X_1(x)$ 与 $X_2(x)$ 的 Wronski 行列式 $\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_1' & X_2' \end{vmatrix}$ 在点 $x=a$ 处等于零，从而立即得出，函数 $X_1(x)$ 与 $X_2(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上必线性相关。

对任意的特征函数 $\widetilde{X}(x)$，函数
$$X(x)=\frac{\widetilde{X}(x)}{\sqrt{\int_a^b \rho(x)\widetilde{X}^2(x)\,\mathrm{d}x}}$$
也是特征函数，但它已是带权函数 $\rho(x)$ 标准化了的，即
$$\int_a^b \rho(x)X^2(x)\,\mathrm{d}x=1.$$
以后，我们总认为特征函数是已经这样带权标准化了的。

2) 对应于不同特征值 λ_1、λ_2 的特征函数 $X_1(x)$、$X_2(x)$ 是带权函数 $\rho(x)$ 互为正交的，即满足
$$\int_a^b \rho(x)X_1(x)X_2(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

事实上，将恒等式
$$(pX_1')'-qX_1+\lambda_1\rho X_1=0$$
与
$$(pX_2')'-qX_2+\lambda_2\rho X_2=0$$
分别乘以函数 X_2 和 X_1，并从第一式减去第二式，就得出恒等式
$$(pX_1')'X_2-(pX_2')'X_1+(\lambda_1-\lambda_2)\rho X_1X_2=0,$$
把它关于 x 从 a 到 b 积分，并利用分部积分法得到
$$\begin{aligned}\int_a^b (\lambda_2-\lambda_1)\rho X_1X_2\mathrm{d}x &= (pX_1'X_2-pX_2'X_1)\Big|_a^b \\ &\quad -\int_a^b pX_1'X_2'\,\mathrm{d}x+\int_a^b pX_2'X_1'\,\mathrm{d}x \\ &= p(b)\left[X_1'(b)X_2(b)-X_2'(b)X_1(b)\right]\end{aligned}$$

$$-p(a)[X_1'(a)X_2(a)-X_2'(a)X_1(a)].$$

由边值条件(7.65)，上式最右端为零，所以得到

$$\int_a^b(\lambda_2-\lambda_1)\rho X_1X_2\mathrm{d}x=0.$$

但按假设 $\lambda_1\neq\lambda_2$，于是得到

$$\int_a^b\rho(x)X_1(x)X_2(x)=0.$$

这就是所要证明的.

S-L 问题的特征值和特征函数是否存在？特征函数系是否有完备的性质呢？这些是分离变量法中的基本问题.

下面利用二阶微分算子的所谓 Green 函数把 *S-L* 问题化为等价的可对称化的积分方程，利用对称方程的若干已知结果，即可回答上面所提出的这些基本问题.

将方程(7.66)中不含参数 λ 的那些项的和记为

$$L(X)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right]-q(x)X.$$

对于二阶微分算子 L，下面引进 Green 函数.

考察非齐次方程

$$L(X)=-g_\varepsilon(x),\tag{7.67}$$

这里的函数 $g_\varepsilon(x)$ 定义在整个区间 $[a,b]$ 上，在这区间中除了一个小区间 $[\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon]$ 之外恒为零，此处 ξ 是区间 (a,b) 内的一个定点，$\varepsilon>0$，并且它在区间 $[\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon]$ 上的积分等于 1，即

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon}g_\varepsilon(x)\mathrm{d}x=1.\tag{7.68}$$

当 $\varepsilon\to0$ 时，取极限，就得到类似于在点 $x=\xi$ 的集中力函数. 在这些条件下，我们假设方程 (7.67) 在边值条件 (7.65) 下存在着解 $y_\varepsilon(x)$，把方程(7.67)两端关于 x 在区间 $[\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon]$ 上积分，注意到条件(7.68)，有

$$p(x)y_\varepsilon'(x)\Big|_{x=\xi-\varepsilon}^{x=\xi+\varepsilon}-\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon}q(x)y_\varepsilon(x)\mathrm{d}x=-1.$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，设 $y_\varepsilon(x)$ 的极限为 $y(x)$，于是就有

$$y'(\xi+0)-y'(\xi-0)=-\frac{1}{p(\xi)}.$$

这就是说，上述解的导数 $y'(x)$ 在点 $x=\xi$ 处应有第一类间断，它的跃度等于 $-\dfrac{1}{p(\xi)}$. 自然，这个解依赖于区间 $[a, b]$ 中点 ξ 的选择，即解 $y(x)$ 是两个变量 x 与 ξ 的函数，记作 $G(x, \xi)$. 我们称这样的 $G(x, \xi)$ 为算子 L 在边值条件(7.65)下的 Green 函数.

下面给出 Green 函数的确切定义:

定义 7.4 二阶微分算子 L 在边值条件(7.65)下的 Green 函数是指满足下列 4 个条件的函数 $G(x, \xi)$:

1° 它在正方形 R: $\left\{a\leqslant \begin{matrix}x\\ \xi\end{matrix}\leqslant b\right\}$ 上有定义且连续;

2° 把它作为变量 x 的函数，在区间 $[a, \xi)$ 与 $(\xi, b]$ 内有到二阶的连续导数，且满足方程

$$L(G)=0;$$

3° 它作为变量 x 的函数，在区间 $[a, b]$ 的端点满足边值条件(7.65);

4° 在正方形 R 的对角线 $x=\xi$ 上，它关于变量 x 的导数 $G'_x(x, \xi)$ 有第一类间断，且适合条件:

$$\begin{aligned}&G'_x(\xi+0, \xi)-G'_x(\xi-0, \xi)=-\frac{1}{p(\xi)};\\ &G'_x(\xi, \xi+0)-G'_x(\xi, \xi-0)=\frac{1}{p(\xi)}.\end{aligned}\tag{7.69}$$

最后的条件是说，对于正方形 R 的对角线 $x=\xi$ 上的一点，从区域 $\xi>x$ 内来趋近它以及从区域 $\xi<x$ 内来趋近它，导数 $G'_x(x, \xi)$ 都应有定值，且这两个极限值之差等于 $\dfrac{1}{p(\xi)}$. 在这两个区域的每一个之中，由于 $L(G)=0$. $G(x, \xi)$ 关于第一个变量 x 的二阶导数 $G''_{xx}(x, \xi)$ 可表为

$$p(x)G''_{xx}(x, \xi)=-p'(x)G'_x(x, \xi)+q(x)G(x, \xi).$$

因而，当一点从对角线 $x=\xi$ 的某一侧趋近于此对角线上的点时，

这个二阶导数就有确定的极限.

下面证明,满足上述定义的 Green 函数是存在的,即下面的定理所述.

定理 7.11 若 $\lambda=0$ 不是特征值,则 Green 函数存在,且是唯一的.

证明 作齐次方程 $L(X)=0$ 的一个解 $y_1(x)$,它取满足边值条件 (7.65) 中第一式的某两个不同时为零的数作为初始值 $y_1(a)$ 和 $y_1'(a)$. 显然,这样的函数 $y_1(x)$ 在整个区间 $[a, b]$ 上唯一地确定,且不恒等于零. 同样地,作齐次方程 $L(X)=0$ 的另一个解 $y_2(x)$,它取满足边值条件(7.65)中第二式的某两个不同时为零的数作为初始值 $y_2(b)$ 和 $y_2'(b)$. 显然,这样的函数 $y_2(x)$ 也唯一地确定在整个区间 $[a, b]$ 上,且不恒等于零.

易见,函数 $c_1y_1(x)$ 和 $c_2y_2(x)$ 对于任意的常数 c_1 和 c_2 都满足方程 $L(X)=0$,且分别满足边值条件(7.65)中的第一个条件和第二个条件;又解 $c_1y_1(x)$ 和 $c_2y_2(x)$, c_1 和 c_2 都是任意常数,分别取尽了满足边值条件 (7.65) 中第一个条件和第二个条件的所有的解.

这样确定的两个解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 必是线性无关的. 事实上,如果它们线性相关,即 $y_1(x)=cy_2(x)$, $x\in[a, b]$, c 是常数,则函数 $y_1(x)$ 就会使(7.65)的两个边值条件都得到满足,从而 $\lambda=0$ 就是特征值了. 这与定理所作的假设相矛盾.

令
$$G(x, \xi)=\begin{cases}c_1y_1(x), & x<\xi;\\ c_2y_2(x), & x>\xi.\end{cases}$$

我们选取常数 c_1 与 c_2,使得函数 $G(x, \xi)$ 在点 $x=\xi$ 是连续的,而一阶导数 $G_x'(x, \xi)$ 在 $x=\xi$ 处具有 Green 函数定义中的跃度,即等式(7.69)成立. 这样就导致决定常数 c_1 和 c_2 的下列两个方程:

$$\begin{aligned}&c_1y_1(\xi)-c_2y_2(\xi)=0;\\ &c_1y_1'(\xi)-c_2y_2'(\xi)=\frac{1}{p(\xi)}\end{aligned}\tag{7.70}$$

这个方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} y_1(\xi) & -y_2(\xi) \\ y_1'(\xi) & -y_2'(\xi) \end{vmatrix}$$

正好是两个解 $y_1(x)$和 $y_2(x)$的 Wronski 行列式在点 $x=\xi$ 的值的负值，由于上面已经证实了函数 $y_1(x)$与 $y_2(x)$ 线性无关，所以这个行列式不为零．因此，从(7.70)就能唯一地确定出常数值 c_1 和 c_2.

注意到 $\quad y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)=\dfrac{c}{p(x)}$,

c 是一个非零常数．添加常数因子（例如对解 $y_1(x)$），就可以认为两个解 $y_1(x)$和 $y_2(x)$满足条件

$$p(x)[y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)]=1.$$

这样一来，可从方程组(7.70)直接解得

$$c_1=y_2(\xi),\ c_2=y_1(\xi).$$

从而，就得出 Green 函数 $G(x, \xi)$为

$$G(x, \xi)=\begin{cases} y_1(x)y_2(\xi), & (x\leqslant\xi); \\ y_2(x)y_1(\xi), & (x\geqslant\xi). \end{cases} \tag{7.71}$$

不难直接验证，上面确定的函数(7.71) 满足定义 7.4 中的所有 4 个条件．

上面证明 Green 函数的存在是一种构造性的，从而也就保证了 Green 函数的唯一性．定理证毕．

从 Green 函数 (7.71) 的形式可看到，它不仅在区间 $a<x<b$ 内确定，而且也在端点 $x=a$、$x=b$ 处有意义，因而它定义在整个正方形 R 上．此外，在正方形 R 内，Green 函数显然具有对称性：

$$G(x, \xi)=G(\xi, x). \tag{7.72}$$

有了 Green 函数 $G(x, \xi)$后，就可把方程

$$L(X)=-f(x),\ x\in[a, b] \tag{7.73}$$

的满足端点边值条件(7.65)的解 $X(x)$ 用积分显式表示出来，这里 $f(x)$是给定在区间$[a, b]$上的连续函数．即如下面的定理所述．

定理 7.12 设 $\lambda=0$ 不是特征值，则方程(7.73)的满足边值条

件(7.65)的唯一解 $X(x)$ 由公式

$$X(x)=\int_a^b G(x,\ \xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{7.74}$$

给出.

证明 方程(7.73)的满足边值条件(7.65)的解如果存在，只能有一个. 这是因为，假若有两个不同解的话，则它们的差就满足齐次方程 $L(X)=0$ 和边值条件(7.65)，这就是说，$\lambda=0$ 就是特征值. 这与题设相矛盾.

现在验证，由积分(7.74)所定义的函数 $X(x)$ 满足方程(7.73)和边值条件(7.65).

由于 Green 函数 $G(x,\ \xi)$ 关于 x 的一阶导数 $G'_x(x,\ \xi)$ 具有不连续性，我们把积分(7.74)的积分区间分为两部分 $[a,\ x]$ 与 $[x,\ b]$，而得到

$$X(x)=\int_a^x G(x,\ \xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi+\int_x^b G(x,\ \xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

对上式关于 x 求导，得到

$$\begin{aligned}X'=&\int_a^x G'_x(x,\ \xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi+G(x,\ x-0)f(x)\\&+\int_x^b G'_x(x,\ \xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi-G(x,\ x+0)f(x).\end{aligned}$$

由于 $G(x,\ \xi)$ 本身是连续的，即 $G(x,\ x+0)=G(x,\ x-0)$，所以由上式得出

$$\begin{aligned}X'=&\int_a^x G'_x(x,\ \xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi+\int_x^b G'_x(x,\ \xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi\\=&\int_a^b G'_x(x,\ \xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi.\end{aligned} \tag{7.75}$$

由式(7.74)和(7.75)以及 $G(x,\ \xi)$ 满足边值条件(7.65)这一事实，可直接得出函数(7.74)也满足这些边值条件.

将(7.74)式再对 x 求导，就得到

$$\begin{aligned}X''=&\int_a^x G''_{xx}(x,\ \xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi\\&+[G'_x(x,\ x-0)-G'_x(x,\ x+0)]f(x),\end{aligned}$$

注意到条件(7.69)，就得出

$$X''=\int_a^b G''_{xx}(x,\ \xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi-\frac{f(x)}{p(x)}.$$

把(7.74)、(7.75)及上式代入方程(7.73)的左端，得到

$$\int_a^b L(G)f(\xi)\mathrm{d}\xi-f(x),$$

由于 $L(G)=0$，故上式等于 $-f(x)$，从而由积分(7.74)所确定的函数 $X(x)$ 满足方程(7.73)．定理得证．

从上面的论证过程还可以看出，由公式(7.74)所确定的函数 $X(x)$ 在整个区间 $(a,\ b)$ 内有到二阶的连续导数．

在此应指出，如果函数 $X(x)$ 是区间 $[a,\ b]$ 上有到二阶连续导数的任意函数，并且满足边值条件(7.65)，则就得到相应的连续函数

$$f(x)=-L(X).$$

按上面定理 7.12 所证明过的，函数 $X(x)$ 可由公式(7.74)用 $f(x)$ 表示出来．

这样一来，方程(7.73)和公式(7.74)建立了两类函数之间一对一的相互对应：在区间 $[a,\ b]$ 上具有二阶连续导数且满足边值条件(7.65)的函数 $X(x)$ 属于一类；而在区间 $[a,\ b]$ 上连续的函数 $f(x)$ 属于另一类．借助方程(7.73)，由前一类的函数 $X(x)$ 可得到后一类的相应函数 $f(x)$；而按公式(7.74)，由后一类的函数 $f(x)$ 可得到前一类的相应函数 $X(x)$．

现在回到 S–L 问题上来．利用上面所得出的结果，可以把这个边值问题化为积分方程．事实上，把方程(7.66)改写为

$$L(X)=-\lambda\rho(x)X(x),$$

则按照以上所述可立即得出，这个方程的带有边值条件(7.65)的问题等价于求积分方程

$$X(x)=\lambda\int_a^b G(x,\ \xi)\rho(\xi)X(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad (7.76)$$

的连续解的问题，这里 $G(x,\ \xi)$ 是 Green 函数．

积分方程(7.76)是具有连续核 $G(x,\ \xi)\rho(\xi)$ 的方程，它不是

对称方程．但是，我们可以把它对称化．为此，注意到函数 $\rho(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上恒为正，我们将 $\sqrt{\rho(x)}$ 乘到积分方程(7.76)的两端，就得到

$$\sqrt{\rho(x)}X(x)=\lambda\int_a^b G(x, \xi)\sqrt{\rho(x)\rho(\xi)}\sqrt{\rho(\xi)}\ X(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{7.77}$$

我们记
$$K(x, \xi)=G(x, \xi)\sqrt{\rho(x)\rho(\xi)},$$
并作未知函数代换

$$\varphi(x)=\sqrt{\rho(x)}X(x), \tag{7.78}$$

则方程(7.77)就可写为如下的形式：

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x, \xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{7.79}$$

显然，这是具有对称核 $K(x, \xi)$ 的积分方程．利用第四章中关于对称方程的已知结果，可得知，积分方程(7.79)存在着特征值集 λ_n $(n=1, 2, \cdots)$，它们都是实数，相应的特征函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=1, 2, \cdots)$是正交标准化了的，即

$$\int_a^b \varphi_j(x)\varphi_m(x)\mathrm{d}x=\delta_{jm}=\begin{cases}1, & j=m,\\ 0, & j\neq m.\end{cases}$$

由此，注意到关系式(7.78)，就可得出原先的积分方程(7.76)的特征函数系$\{X_n(x)\}$，$X_n(x)=\dfrac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\rho(x)}}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 是带权函数 $\rho(x)$的正交标准系，即

$$\int_a^b \rho(x)X_j(x)X_m(x)\mathrm{d}x=\delta_{jm}.$$

这样，就得到如下的结论：*S-L 问题当 $\lambda=0$ 不是其特征值时，有无穷多个实的特征值*

$$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots$$

和对应于这些特征值的特征函数 $X_1(x)$，$X_2(x)$，$\cdots$，$X_n(x)$，$\cdots$．它们是带权正交标准的函数系．

现在来证明这个特征函数系$\{X_n(x)\}$ $(n=1, 2, \cdots)$的全体在带权平方可积函数空间 $L_\rho^2[a, b]$内构成完备系．

设 $g(x)$ 是区间 $[a, b]$ 内的二阶连续可微且满足边值条件 (7.65) 的任意函数，则 $L[g(x)]$ 为连续函数. 记 $h(x)=-\frac{L[g(x)]}{\rho(x)}$, 即

$$L[g(x)]=-\rho(x)h(x),$$

这里 $h(x)$ 是连续函数. 则由公式(7.74), 有

$$g(x)=\int_a^b G(x, \xi)\rho(\xi)h(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

或者写成 $\sqrt{\rho(x)}g(x)=\int_a^b K(x, \xi)\sqrt{\rho(\xi)}h(\xi)\mathrm{d}\xi.$

由第三章中的 Hilbert-Schmidt 定理, 函数 $\sqrt{\rho(x)}g(x)$ 可以按对称核 $K(x, \xi)$ 的特征函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ 展开为绝对收敛和一致收敛的级数, 即

$$\sqrt{\rho(x)}g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}g_k\varphi_k(x), \tag{7.80}$$

其中 $g_k=\int_a^b g(x)\sqrt{\rho(x)}\varphi_k(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\rho(x)X_k(x)\mathrm{d}x.$

则根据变换关系式(7.78), 式(7.80)就可写成

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}g_kX_k(x),$$

且级数在区间 $[a, b]$ 上是绝对和一致收敛的.

但是, 这类函数 $g(x)$ 在空间 $L_\rho^2[a, b]$ 中是稠密的. 因之, 函数系 $\{X_k(x)\}$ 在空间 $L_\rho^2[a, b]$ 中构成完备系.

这样, 就得到了关于 S-L 问题的又一结论: 如果在区间 $[a, b]$ 上的二阶连续可微的任意函数 $g(x)$ 满足边值条件(7.65), 则它可以按 S-L 问题的特征函数系 $\{X_n(x)\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 展开成绝对且一致收敛的级数

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}g_kX_k(x),$$

其中

$$g_k=\int_a^b g(x)\rho(x)X_k(x)\mathrm{d}x.$$

在边值条件 (7.65) 中 $A_0\geqslant 0$, $B_0\leqslant 0$, $A_0^2+B_0^2\neq 0$, $A_1\geqslant 0$, $B_1\geqslant 0$, $A_1^2+B_1^2\neq 0$ 的情形包括了固定端点的情形($A_0=1$, $B_0=0$,

$A_1=1,\ B_1=0$)、自由端点的情形 ($A_0=0,\ B_0=-1,\ A_1=0,\ B_1=1$)和弹性支承的情形 ($A_0>0,\ B_0=-1,\ A_1>0,\ B_1=1$) 等几种数学物理问题中典型的边值情形. 应该指出，如果方程(7.66)中函数 $q(x)\geqslant 0$，并且边值条件 (7.65) 中的常数 $A_0\geqslant 0,\ B_0\leqslant 0,\ A_0^2+B_0^2\neq 0;\ A_1\geqslant 0,\ B_1\geqslant 0,\ A_1^2+B_1^2\neq 0$，则 S-L 问题的特征值 $\lambda_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$皆为非负的. 事实上，因为

$$L(X_n)=-\lambda_n\rho(x)X_n(x),$$

以函数 $X_n(x)$乘以上等式的两端，并且关于变量 x 从 a 到 b 积分，就得到

$$\begin{aligned}\lambda_n&=-\int_a^b X_n(x)L(X_n)\mathrm{d}x\\&=-\int_a^b X_n(x)\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}X_n(x)}{\mathrm{d}x}\right]-q(x)X_n(x)\right\}\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\left\{p(x)\left(\frac{\mathrm{d}X_n(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2+q(x)X_n^2(x)\right\}\mathrm{d}x\\&\quad-[p(x)X_n(x)X_n'(x)]\Big|_a^b.\end{aligned}$$

当边值条件为固定端点或自由端点时，有

$$\lambda_n=\int_a^b\left\{p(x)\left[\frac{\mathrm{d}X_n(x)}{\mathrm{d}x}\right]^2+q(x)X_n^2(x)\right\}\mathrm{d}x;$$

当边值条件为弹性支承的情形时，有

$$\begin{aligned}\lambda_n=&\int_a^b\left\{p(x)\left[\frac{\mathrm{d}X_n(x)}{\mathrm{d}x}\right]^2+q(x)X_n^2(x)\right\}\mathrm{d}x\\&+p(b)A_1X_n^2(b)+p(a)A_0X_n^2(a).\end{aligned}$$

由于假设，在区间$[a,\ b]$上，$p(x)\geqslant p_0>0,\ q(x)\geqslant 0$，又$A_0>0,\ A_1>0$，因之恒有 $\lambda_n\geqslant 0$.

特别是，在固定端点的情形和弹性支承的情形，容易验证，必有 $\lambda_n>0$. 因之，在这些边值条件下，算子 L 的 Green 函数 $G(x,\ \xi)$一定是存在的.

例 1　考察方程

$$y''+\lambda y=0,\ x\in(0,\ 1)$$

和边值条件　　　$y(0)=0,\ y(1)+hy'(1)=0,$

并作出相应的 Green 函数，这里 $h>0$ 是常数.

在本例中，算子 $L(y)=y''$. 作方程 $y''=0$ 的两个解，其中一个满足第一个边值条件；另一个满足第二个边值条件，易于得出这两个解是

$$y_1(x)=x,\quad y_2(x)=(1+h)-x.$$

于是得出相应的 Green 函数

$$G(x,\ \xi)=\begin{cases}\dfrac{1+h-\xi}{1+h}x,\ x\leqslant\xi,\\[2mm] \dfrac{1+h-x}{1+h}\xi,\ \xi\leqslant x.\end{cases}$$

在本例中，所有的特征值 λ_n 皆是正的. 若置 $\lambda_n=\mu_n^2$, 不难得出，μ_n 由方程 $\operatorname{tg}\mu+h\mu=0$ 确定，相应的特征函数为 $c_n\sin\mu_n x$, 这里常数 c_n 由使函数标准化的条件来决定.

下面讨论 $\lambda=0$ 是 S–L 问题的特征值的情形.

为了书写方便起见，不妨假设方程(7.66) 中的 $\rho(x)\equiv1$. 事实上，由于 $\rho(x)\geqslant\rho_0>0$, 我们引入新的自变量

$$t=\int_a^x\rho(x)\mathrm{d}x$$

代替变量 x, 这时，方程(7.66)就成为

$$\rho(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\rho(x)p(x)\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right]+[\lambda\rho(x)-q(x)]X=0,$$

两边除以 $\rho(x)$, 就得到形如(7.66)的方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\rho(x)p(x)\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right]+\left[\lambda-\frac{q(x)}{\rho(x)}\right]X=0,$$

在其中仍然有 $\rho(x)p(x)\geqslant\tilde{p}_0>0$, $\tilde{p}_0$ 是常数，$\dfrac{q(x)}{\rho(x)}\geqslant0$, 而自变量 t 的变化区间已成为 $[0,\ t_0]$, 这里

$$t_0=\int_a^b\rho(x)\mathrm{d}x.$$

这样，我们考察如下的 S–L 问题:

$$L(X)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right]-q(x)X=-\lambda X,\qquad(7.81)$$

$$A_0X(a)+B_0X'(a)=0,\ A_1X(b)+B_1X'(b)=0, \tag{7.65}$$

当 $\lambda=0$ 是其特征值的情形．这时，齐次方程 $L(X)=0$ 有一个满足边值条件(7.65)的非零解 $X=\varphi_0(x)$，我们假设它已标准化．在这种情况下，上面的定义 7.4 中的 Green 函数不能再作出．因而要把 Green 函数的定义本身作出若干修正．

我们保持着以前的关于 Green 函数 $G(x,\xi)$ 本身的连续性，它的导数 $G'_x(x,\xi)$ 在 $x=\xi$ 处的第一类间断性以及满足端点的边值条件(7.65)等等要求，此外，还要求使函数 $G(x,\xi)$ 在区间 $[a,\xi]$ 与 $[\xi,b]$ 内满足带有右端的方程

$$L[G(x,\xi)]=\varphi_0(x)\varphi_0(\xi). \tag{7.82}$$

如果 $\varphi(x)$ 是这个方程的某个解，又满足边值条件(7.65)，则函数 $\varphi(x)+c\varphi_0(x)$ 对于任意常数 c 也满足方程(7.82)和边值条件(7.65)；而为了确定常数 c，现在我们引入新的补充条件，即要求函数 $G(x,\xi)$ 与函数 $\varphi_0(x)$ 正交

$$\int_a^b G(x,\xi)\varphi_0(x)\mathrm{d}x=0. \tag{7.83}$$

方程(7.82)的右端有简单的物理意义：如果 $\lambda=0$ 是问题的特征值，则在频率等于零时就会有共振，因而在具有集中力时就不能得到有限的静力位移，为得出这个位移，除集中力外，还必须添上连续分布的力，这个力是由(7.82)的右端表征的．

类似于前面，就可以作出上述推广的 Green 函数，仍记为 $G(x,\xi)$，它也具有对称性质．

设函数 $\psi(x)$ 是非齐次方程

$$L(\psi)=\varphi_0(x)\varphi_0(\xi) \tag{7.84}$$

的某个解，又以 $\varphi_1(x)$ 表示方程 $L(X)=0$ 的与 $\varphi_0(x)$ 线性无关的另一个解，并设 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_0(x)$ 满足

$$p(x)[\varphi_0(x)\varphi_1'(x)-\varphi_1(x)\varphi_0'(x)]=1. \tag{7.85}$$

记
$$G(x,\xi)=\begin{cases}\psi(x)+c_1\varphi_0(x)+c_2\varphi_1(x), & x\leqslant\xi;\\ \psi(x)+c_3\varphi_0(x)+c_4\varphi_1(x), & x\geqslant\xi,\end{cases} \tag{7.86}$$

其中 c_1、c_2、c_3、c_4 皆为待定常数，我们按照对推广的 Green 函数的

要求来确定它们.

为使函数(7.86)满足边值条件(7.65), 注意到函数 $\varphi_0(x)$ 已满足这些边值条件, 我们得到两个在端点处的等式:

$$\begin{aligned} &A_0\psi(a)+B_0\psi'(a)+c_2[A_0\varphi_1(a)+B_0\varphi_1'(a)]=0, \\ &A_1\psi(b)+B_1\psi'(b)+c_4[A_1\varphi_1(b)+B_1\varphi_1'(b)]=0. \end{aligned} \tag{7.87}$$

由于函数 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_0(x)$ 线性无关, 所以 $\varphi_1(x)$ 不可能满足边值条件(7.65)中的任何一个, 因之, 式(7.87)中 c_2 与 c_4 的系数皆不能为零, 从而可从(7.87)式确定出常数 c_2 和 c_4.

为使函数 $G(x, \xi)$ 满足在 $x=\xi$ 处连续, 以及其一阶导数 $G_x'(x, \xi)$ 在这一点具有第一类间断, 跃度为 $\dfrac{1}{p(\xi)}$ 的条件, 由表达式(7.86)可得到下面两个等式:

$$(c_1-c_3)\varphi_0(\xi)+(c_2-c_4)\varphi_1(\xi)=0;$$

$$(c_1-c_3)\varphi_0'(\xi)+(c_2-c_4)\varphi_1'(\xi)=\frac{1}{p(\xi)}.$$

注意到条件(7.85), 上列两个等式可以写成

$$c_1-c_3=-\varphi_1(\xi); \quad c_2-c_4=\varphi_0(\xi). \tag{7.88}$$

由(7.88)的第一式得到

$$c_1=c_3-\varphi_1(\xi),$$

代入函数(7.86), 然后利用对 $G(x, \xi)$ 的补充条件(7.83)来定出常数 c_3, 从而回过去可确定出常数 c_1.

这样, 我们就按推广 Green 函数的要求定出(7.86)中所有的常数 c_1、c_2、c_3、c_4, 从而就得出了推广的 Green 函数(7.86). 但是, 在此还应该验证, 按等式(7.87)定出的常数 c_2 和 c_4 必满足等式(7.88)的第二式. 这一等式由于(7.87)可以写成

$$-\frac{A_0\psi(a)+B_0\psi'(a)}{A_0\varphi_1(a)+B_0\varphi_1'(a)}+\frac{A_1\psi(b)+B_1\psi'(b)}{A_1\varphi_1(b)+B_1\varphi_1'(b)}=\varphi_0(\xi). \tag{7.89}$$

下面来推导等式(7.89). 为此, 我们对易于直接证明的恒等式

$$\varphi_0(x)L(\psi)-\psi(x)L(\varphi_0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(x)(\varphi_0\psi'-\psi\varphi_0')]$$

沿区间$[a, b]$积分，并注意到$L(\varphi_0)=0$，φ_0已标准化，以及$L(\psi)=\varphi_0(x)\varphi_0(\xi)$等事实，即得到

$$\varphi_0(\xi)=[p(x)(\varphi_0\psi'-\psi\varphi_0')]\Big|_{x=a}^{x=b}$$
$$=p(b)[\varphi_0(b)\psi'(b)-\psi(b)\varphi_0'(b)]$$
$$-p(a)[\varphi_0(a)\psi'(a)-\psi(a)\varphi_0'(a)]. \qquad (7.90)$$

对于函数$\varphi_0(x)$，按假设，有

$$A_0\varphi_0(a)+B_0\varphi_0'(a)=0,\ A_1\varphi_0(b)+B_1\varphi_0'(b)=0. \qquad (7.91)$$

此外，由条件(7.85)，又有

$$\begin{aligned}&p(b)[\varphi_0(b)\varphi_1'(b)-\varphi_1(b)\varphi_0'(b)]=1,\\&p(a)[\varphi_0(a)\varphi_1'(a)-\varphi_1(a)\varphi_0'(a)]=1.\end{aligned} \qquad (7.92)$$

现在，我们从等式(7.91)和(7.92)定出$\varphi_0(a)$、$\varphi_0(b)$、$\varphi_0'(a)$、$\varphi_0'(b)$，然后把它们代入等式(7.90)，就可得出所要验证的等式(7.89)。

为了证明推广的Green函数(7.86)具有对称性，在区间$[a, b]$内任取两点$\xi_1<\xi_2$，写出两个方程

$$L[G(x, \xi_1)]=\varphi_0(\xi_1)\varphi_0(x),\ L[G(x, \xi_2)]=\varphi_0(\xi_2)\varphi_0(x),$$

并以函数$G(x, \xi_2)$和$G(x, \xi_1)$分别乘上列第一个方程和第二个方程，把所得的两个等式相减，且沿区间$[a, b]$积分，注意到由于Green函数的一阶导数$G_x'(x, \xi)$在$x=\xi$点具有间断性，应该把这个积分区间分为三部分：$[a, \xi_1]$、$[\xi_1, \xi_2]$、$[\xi_2, b]$，利用$G(x,\xi)$所满足的边值条件(7.65)以及补充条件(7.83)，并应用恒等式

$$G(x, \xi_2)L[G(x, \xi_1)]-G(x, \xi_1)L[G(x, \xi_2)]$$
$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{p(x)[G(x, \xi_2)G_x'(x, \xi_1)-G(x, \xi_1)G_x'(x, \xi_2)]\},$$

就得到等式

$$\{p(x)[G(x, \xi_2)G_x'(x, \xi_1)-G(x, \xi_1)G_x'(x, \xi_2)]\}\Big|_{x=\xi_1+0}^{x=\xi_1-0}$$
$$+\{p(x)[G(x, \xi_2)G_x'(x, \xi_1)-G(x, \xi_1)G_x'(x, \xi_2)]\}\Big|_{x=\xi_2+0}^{x=\xi_2-0}$$
$$=0.$$

由此，不难直接得出

$$G(\xi_1, \xi_2)=G(\xi_2, \xi_1).$$

利用推广的 Green 函数 $G(x, \xi)$，考察非齐次方程

$$L(X)=-f(x), \tag{7.93}$$

这里的 $f(x)$ 是与 $\varphi_0(x)$ 相正交的已知连续函数，下面证明：方程(7.93)的满足边值条件(7.65)且与 $\varphi_0(x)$ 相正交的解是唯一的，且可由公式

$$X(x)=\int_a^b G(x, \xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{7.94}$$

确定.

事实上，假若有两个解，则它们的差应满足齐次方程和边值条件，因之它应具有形式 $c\varphi_0(x)$，c 是常数，从而它不可能与 $\varphi_0(x)$ 正交. 为了验证函数(7.94)满足方程(7.93)，照前一样，我们把积分区间 $[a, b]$ 分为两部分：$[a, x]$ 与 $[x, b]$，就不难直接计算出

$$L(X)=\int_a^b L[G(x, \xi)]f(\xi)\mathrm{d}\xi-f(x)$$

$$=\varphi_0(x)\int_a^b \varphi_0(\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi-f(x)=f(x).$$

在此利用了 $f(x)$ 与 $\varphi_0(x)$ 正交的条件.

设 $F(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上有到二阶连续导数且满足边值条件(7.65)以及与 $\varphi_0(x)$ 正交的任意函数，那末，若置

$$f(x)=-L(F),$$

就能由公式(7.94)表达 $F(x)$. 为此，只需验证，所得出的函数 $f(x)$ 与 $\varphi_0(x)$ 正交就可以了. 事实上，将恒等式

$$\varphi_0(x)L(F)-F(x)L(\varphi_0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(x)(\varphi_0F'-F\varphi_0')]$$

在区间 $[a, b]$ 上积分，注意到 $L(\varphi_0)=0$，φ_0 和 F 皆满足边值条件(7.65)，就立刻得到 $\varphi_0(x)$ 与 $f(x)$ 的正交性.

此外，对于任意给定的连续函数 $f(x)$，由积分(7.94)所确定的函数 $X(x)$ 必与 $\varphi_0(x)$ 正交. 这是因为积分中的 $G(x, \xi)$ 具有与函数 $\varphi_0(x)$ 正交性质的缘故.

回到 S-L 问题(7.81)与(7.65)，它的每一个与 $\varphi_0(x)$ 不同的

特征函数，即对应于非零特征值的特征函数都与$\varphi_0(x)$正交，而且，从上面所述可以看到，这个边值问题除了函数$\varphi_0(x)$外，与积分方程

$$X(x)=\lambda\int_a^b G(x,\ \xi)X(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{7.95}$$

等价．于是，对于具有二阶连续导数，满足边值条件(7.65)且与$\varphi_0(x)$正交的任意函数，都能按积分方程(7.95)的特征函数系展开成绝对收敛和一致收敛的 Fourier 级数．在这里，我们应指出，由于积分方程(7.95)的所有特征函数都与$\varphi_0(x)$正交，因此，被展开的函数与$\varphi_0(x)$相正交的这个补充条件是必要的．由此也可推知，积分方程(7.95)的特征函数系不是完备的．

例 2． 求参数λ的值，使 Legendre 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda y=0$$

具有在区间$[-1,\ 1]$两端都有界的解．

容易得出，这个问题的特征值是

$$\lambda_n=n(n+1),$$

而正交标准化的特征函数是

$$\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x)\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),$$

其中$P_n(x)$是 Legendre 多项式．可以证明，函数系$\{\varphi_n(x)\}$是完备的．

$\lambda=0$是特征值，相应的特征函数是常数$\varphi_0(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$．为了作出 Green 函数，非齐次方程(7.82)现在是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]=\frac{1}{2},$$

它有特解$y=-\dfrac{1}{4}\lg(1-x^2)$，对应的齐次方程的通解是

$$c_1+c_2\lg\frac{1+x}{1-x},$$

c_1、c_2是常数．于是在$x=\pm1$处保持有界的解分别具有形式

$$y_1(x)=-\frac{1}{4}\lg(1-x^2)+\frac{1}{4}\lg\frac{1+x}{1-x}+\alpha=-\frac{1}{2}\lg(1-x)+\alpha;$$

$$y_2(x)=-\frac{1}{4}\lg(1-x^2)-\frac{1}{4}\lg\frac{1+x}{1-x}+\beta$$
$$=-\frac{1}{2}\lg(1+x)+\beta,$$

其中α、β是常数. 我们选择这些常数,使得上列解在点$x=\xi$为连续,并与$\varphi_0(x)$正交. 由前一个要求得出

$$-\frac{1}{2}\lg(1-\xi)+\alpha=-\frac{1}{2}\lg(1+\xi)+\beta,$$

于是可置 $\alpha=-\frac{1}{2}\lg(1+\xi)+\gamma,\ \beta=-\frac{1}{2}\lg(1-\xi)+\gamma,$

这里γ是常数,它应由后一个要求即条件(7.83)来确定,也就是按条件

$$\int_{-1}^{1}G(x,\ \xi)\mathrm{d}x=0$$

确定出
$$\gamma=\frac{1}{2}-\lg 2$$

这样,就得出 Green 函数由下式确定:

$$G(x,\ \xi)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\lg[(1-x)(1+\xi)]-\lg 2+\frac{1}{2},\ x\leqslant\xi;\\ -\frac{1}{2}\lg[(1+x)(1-\xi)]-\lg 2+\frac{1}{2},\ x\geqslant\xi.\end{cases}$$

这个函数虽然在正方形$-1\leqslant\begin{matrix}x\\ \xi\end{matrix}\leqslant 1$的顶点$x=\xi=-1$和$x=\xi=1$附近无界,但是只要函数$g(\xi)$连续,则积分$\int_{-1}^{1}G(x,\ \xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi$就是连续的了.

每一个在区间$[-1,1]$上有到二阶连续导数的函数$f(x)$,如果又满足与$\varphi_0(x)$正交的条件$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=0$,则它就可展开为函数系$\varphi_n(x)(n=1,\ 2,\ \cdots)$,也就是展开为 Legendre 多项式的绝对和一致收敛的 Fourier 级数. 如果$f(x)$不满足条件$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=0$,则只要把一般的展开定理应用于满足所述条件的函数

$$f_1(x)=f(x)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$$

上就可以了．对原先的函数$f(x)$，就得出按全部 Legendre 多项式的展开式，在其中也包括$P_0(x)=$常数．

最后，我们要指出，在不少 S–L 问题的方程中出现的函数 $p(x)$在区间$[a, b]$的端点处可能为零，上面的例 2 就是这种情形，甚至还有可能，函数 $q(x)$在区间$[a, b]$的端点处会有极奇性．这时，在这些端点处的边值条件要代之以未知函数在这些点为有界的条件，前面所述结论基本上依然成立．还会碰到在无穷区间情形的边值问题．请参阅有关的专著，例如[30]、[31]、[32]等．下面举一个这方面情形的例子来结束本节．

例 3． 在研究边缘固定的圆形膜振动时，会导致如下所述的 S–L 问题：求参数 λ 的值，使方程

$$X''+\frac{1}{x}X'+\left(\lambda-\frac{n^2}{x^2}\right)X=0$$

有非零解，此解在 $x=0$ 处为有限；而在 $x=l$ 处等于零，其中 n 为非负整数．

这个边值问题的特点是：方程的系数在端点 $x=0$ 处有一个极点，在这个端点，只要求解有界，以代替确定的边值条件．

把方程写成形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xX')+\left(\lambda x-\frac{n^2}{x}\right)X=0,$$

相应的方程 $L(X)=0$ 有线性无关解 x^n 与 x^{-n}(假设 $n>0$) 或 1 与 $\lg x$(在 $n=0$ 情形)．

定 Green 函数时，在端点 $x=0$ 处的边值条件要代之以在这点为有限，因之在 $0\leqslant x\leqslant\xi$ 中，应取 c_1x^n($n>0$ 情形)或 c_1($n=0$ 情形)，在 $\xi\leqslant x\leqslant 1$ 中，应取 $c_2x^n+c_3x^{-n}$($n>0$ 情形)或 $c_3+c_2\lg x$($n=0$ 情形)，使它在 $x=1$ 时为零，即得 $c_2(x^n-x^{-n})$或 $c_2\lg x$．然后，利用 Green 函数的连续性和一阶导数在 $x=\xi$ 具有第一类间断，可定出常数 c_1 和 c_2．这样，就得到 Green 函数是

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2n}\left[\left(\dfrac{x}{\xi}\right)^n-(x\xi)^n\right], & x\leqslant\xi\\ \dfrac{1}{2n}\left[\left(\dfrac{\xi}{x}\right)^n-(x\xi)^n\right], & \xi\leqslant x\end{cases}\qquad (n>0\text{ 的情形})$$

或 $$G(x,\xi)=\begin{cases}-\lg\xi, & x\leqslant\xi\\ -\lg x, & \xi\leqslant x\end{cases}\qquad (n=0\text{ 的情形}).$$

把边值问题化为积分方程时，所得到的方程的核是 $G(x,\xi)\sqrt{x\xi}$，这个积分方程的特征函数是

$$\varphi_n^{(m)}(x)=c_n\sqrt{x}\,J_n(\mu_m^{(n)}x),$$

其中$J_n(x)$是第一类的 n 阶Bessel 函数，而$\mu_m^{(n)}$是超越方程$J_n(\mu^{(n)})=0$ 的正根($m=1,2,\cdots$).

在这里，Green 函数 $G(x,\xi)$当点(x,ξ)趋于正方形 $0\leqslant\dfrac{x}{\xi}\leqslant 1$ 的顶点 $(0,0)$时，极限不存在，而这正是由在本例一开始所指出的它的特点所确定的，即相应的系数 $p(x)$在点 $x=0$ 为零，且 $q(x)$ 在 $x=0$ 处有极奇性.

§8 棒的横向弯曲问题中临界力的计算

我们知道，在考察棒的横向弯曲问题时，棒的挠度曲线 $y=y(x)$满足微分方程

$$\frac{d}{dx}\left(EI\frac{dy}{dx}\right)=M,$$

其中 E 是棒的弹性模量；I 为棒于横坐标 x 处的截面的惯性矩；而 M 是作用在相应横截面上的挠矩.

现研究当棒的两端受压的情形. 以 P 表示压力，于是 $M=-Py$，而挠度曲线的方程就是

$$\frac{d}{dx}\left(EI\frac{dy}{dx}\right)+Py=0.\qquad (7.96)$$

以 l 表示棒的长度，由于棒的两端在与棒的垂直方向上不移动，所以应有边值条件：

$$y(0)=y(l)=0.\qquad (7.97)$$

记 $\lambda=\frac{P}{E}$, 方程(7.96)就可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(I\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\lambda y=0.$$

以 $G(x,\ \xi)$ 表示算子 $L(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(I\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$ 在边值条件 (7.97) 下的 Green 函数，于是上述边值问题(7.96)与(7.97)就等价于积分方程

$$y(x)-\lambda\int_0^l G(x,\ \xi)y(\xi)\mathrm{d}\xi=0. \tag{7.98}$$

这样，受压棒的弯曲的挠度曲线 $y(x)$ 应满足上面具有对称核的积分方程(7.98). 任意取定力P时，$\lambda=\frac{P}{E}$ 不一定是特征值，因而这时相应的$y(x)\equiv0$，就是说，任意取压缩力时，棒一般仍保持直线状，只在压缩力 $P=\lambda_n E$ 的情况下，$y(x)$ 才能不恒等于零，这时棒就弯曲，失去它的稳定刚性，这里的 λ_n 是积分方程(7.98)的特征值.

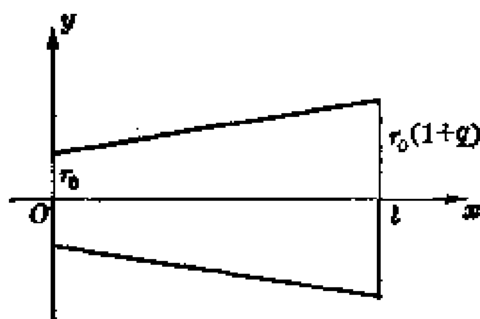


图 7.8

在棒的横向弯曲问题中，重要的是要确定使棒失去稳定刚性的最小的力 P——称为临界力，它等于棒的弹性模量 E 和积分方程(7.98)的最小特征值 λ_1 的乘积. 这时，我们可取比真值稍小些的近似公式(见第三章)给出 λ_1 就可以了：

$$\lambda_1\approx\frac{1}{\sqrt{A_2}},\quad A_2=\int_0^l\int_0^l G^2(x,\ \xi)\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi.$$

例如，我们考虑棒为一个锥体形的临界力问题. 以 r_0 和 $r_0(1+q)$ ($q>0$ 是常数)表示棒两端的截面半径(见图 7.8). 于是在横坐标 x 处的棒的截面半径是 $r_0\left(1+\frac{qx}{l}\right)$, 这截面的惯性矩为

$$I=\frac{\pi\gamma r_0^4}{2}(1+\alpha x)^4,$$

其中 γ 为棒的密度，$\alpha=\frac{q}{l}$. 我们把方程重新写出为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1+\alpha x)^4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\mu y=0,\ \mu=\frac{2\lambda}{\pi\gamma r_0^4}. \tag{7.99}$$

下面求算子 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1+\alpha x)^4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]$ 在边值条件(7.97)下的 Green 函数 $G(x,\xi)$. 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1+\alpha x)^4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]=0$$

有通积分
$$y=c_1+\frac{c_2}{(1+\alpha x)^3},$$

其中 c_1 与 c_2 是任意常数. 积分

$$y_1(x)=1-\frac{1}{(1+\alpha x)^3}$$

满足边值条件 $y(0)=0$, 而积分

$$y_2(x)=\frac{1}{(1+\alpha x)^3}-\frac{1}{(1+\alpha l)^3}$$

满足边值条件 $y(l)=0$. 于是, 我们选取适当常数

$$c=3\alpha\left(1-\frac{1}{(1+\alpha l)^3}\right),$$

就得到所要求的 Green 函数

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{c}\left[1-\dfrac{1}{(1+\alpha x)^3}\right]\left[\dfrac{1}{(1+\alpha\xi)^3}-\dfrac{1}{(1+\alpha l)^3}\right], \\ \qquad 0\leqslant x\leqslant\xi; \\ \dfrac{1}{c}\left[1-\dfrac{1}{(1+\alpha\xi)^3}\right]\left[\dfrac{1}{(1+\alpha x)^3}-\dfrac{1}{(1+\alpha l)^3}\right], \\ \qquad \xi\leqslant x\leqslant l.\end{cases}$$

于是, 方程(7.99)在边值条件(7.97) 下的临界力问题等价于求积分方程

$$y(x)-\mu\int_0^l G(x,s)y(s)\mathrm{d}s=0 \tag{7.100}$$

的最小特征值问题.

积分方程 (7.100) 的最小特征值 μ_1 可按下面的近似公式确定:

$$\frac{1}{\mu_1^2}\approx\int_0^l\int_0^l G^2(x,\xi)\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi.$$

计算右端积分是初等的，但较烦琐．为简单起见，我们限于考虑当 q 的数值较小的情形，因而这时可以略去 q 的幂次高于 1 的各项，由此计算得

$$\frac{1}{\mu_1^2}\approx l^4\left(\frac{1}{90}-\frac{2q}{45}\right),$$

从而就可求出临界力 P．因为 $\lambda=I_0\mu$，而

$$I_0=\frac{\pi\gamma r_0^4}{2}$$

是在 $x=0$ 处棒的截面的惯性矩，于是我们得出所求临界力的近似值是

$$P=E\lambda_1=EI_0\mu_1=\frac{\sqrt{90}\,EI_0}{l^2}(1+2q)$$

$$=\frac{9.487EI_0}{l^2}(1+2q).$$

若设 $q=0$，即棒的粗细一样，截面不变．在这种情况下，所求临界力的近似值为

$$P=\frac{9.487EI_0}{l^2},$$

它比临界力的真值

$$\frac{\pi^2EI_0}{l^2}=\frac{9.897EI_0}{l^2}$$

要小百分之五．

上面的方法也可用于求在较复杂的情形下的临界力．

习 题 汇 编

第二章习题

1．用逐次逼近法解下列各积分方程：

1) $\varphi(x)-\frac{1}{2}\int_0^1\varphi(s)\,\mathrm{d}s=e^x$;

2) $\varphi(x)+\lambda\int_0^1 e^{x+s}\varphi(s)\,\mathrm{d}s=x$.

2．用逐次逼近法解以下各积分方程，并写出相应的解核：

1) $\varphi(x)-\lambda\int_0^1(x+s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s=18x^2-9x-4$;

2) $\varphi(x)-\lambda\int_0^1 xe^s\varphi(s)\,\mathrm{d}s=f(x)$.

3．解 Volterra 型第二种积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^x e^{k(x-s)}\varphi(s)\,\mathrm{d}s=f(x),$$

并写出它的解核，其中 k 是实常数.

4．解下列各个 Volterra 型第二种积分方程：

1) $\varphi(x)-3\int_0^x\cos(x-s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s=e^x$;

2) $\varphi(x)-\int_0^x[1+2(x-s)]\varphi(s)\,\mathrm{d}s=x+1$.

5．解下列各退化核积分方程(假设 λ 不是特征值)：

1) $\varphi(x)-\lambda\int_0^1 xs\varphi(s)\,\mathrm{d}s=e^x$;

2) $\varphi(x)-\lambda\int_0^1(x-s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s=x$;

3) $\varphi(x)-\lambda\int_0^1 e^{x+s}\varphi(s)\,\mathrm{d}s=x^2$;

4) $\varphi(x)-\lambda\int_0^1 xe^s\varphi(s)\,\mathrm{d}s=f(x)$;

5) $\varphi(x)-\lambda\int_0^{2\pi}(\sin x\cdot\sin s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s=f(x)$;

6) $\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi}(1+\sin x\cdot\sin s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s=x$.

6．试证明：解核满足以下方程

$$\Gamma(x,\ s;\ \lambda)=K(x,\ s)+\lambda\int_a^b \Gamma(x,\ t;\ \lambda)K(t,\ s)\mathrm{d}t.$$

7．解下列各退化核积分方程，并问当 λ 是特征值时，积分方程是否可解?

1) $\varphi(x)-\lambda\int_0^{10} xs\varphi(s)\mathrm{d}s=e^x$;

2) $\varphi(x)-\lambda\int_0^1 (1+xs)\varphi(s)\mathrm{d}s=x^2$;

3) $\varphi(x)-\lambda\int_0^1 (x^2s+xs^2)\varphi(s)\mathrm{d}s=x$;

4) $\varphi(x)-\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x+2s)\varphi(s)\mathrm{d}s=\cos x$;

5) $\varphi(x)-\int_0^1 (1+s)\varphi(s)\mathrm{d}s=x$;

6) $\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi}\cos x\cdot\varphi(s)\mathrm{d}s=0$.

8．试证明：齐次积分方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^{\pi}(\sin x\cdot\sin 2s+\sin 3x\cdot\sin 4s)\varphi(s)\mathrm{d}s$$

只有零解.

9．设在 OY 轴上有一个纯质量分布，它关于 OX 轴是对称的；在 OX 轴上有一点 $A(x,\ 0)$，它以某种规律吸引 OY 轴．现在已知点 A 对整个 OY 轴的引力是 $\psi(x)$，求此规律.

10．用 Fredholm 方法解下列各积分方程：

1) $\varphi(x)-\int_0^1 xs\varphi(s)\mathrm{d}s=x$;

2) $\varphi(x)-\int_a^b x\varphi(s)\mathrm{d}s=\cos x$;

3) $\varphi(x)-\lambda\int_0^1 e^{x+s}\varphi(s)\mathrm{d}s=x$.

11．设 λ 是核 $K(x,\ s)$ 的任一特征值，$\varphi(x)$ 是与 λ 相对应的特征函数．试证明：λ^n 是核 $K_n(x,\ s)$ 的特征值，且 $\varphi(x)$ 是 $K_n(x,\ s)$ 对应于 λ^n 的特征函数.

12．假设积分方程（$K(x,\ s)$ 和 $f(x)$ 都是已知实函数）

$$\varphi(x)+\int_a^b K(x,\ s)\varphi(s)\mathrm{d}s=f(x)$$

的齐次方程有非零解 $\varphi_1(x)$，…，$\varphi_n(x)$，且右端函数 $f(x)$ 适合可解性条件．试证明：存在广义解核 $\Gamma(x,\ s)$，上列积分方程的一般解可以表成形式

$$\varphi(x)=f(x)+\int_a^b \Gamma(x,\ s)f(s)\mathrm{d}s+c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x),$$

其中$c_1, \cdots, c_n$都是任意常数。

第三章习题

1．对于 Fredholm 积分方程组（矩阵$K(x, y)$和向量$f(x)$都是连续的）

$$\varphi(x)+\lambda\int_a^b K(x, y)\varphi(y)\mathrm{d}y=f(x).$$

试证明：1）当参数$|\lambda|$适当小时，上列方程组的解（向量）$\varphi(x)$可表为

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b \Gamma(x, y; \lambda)f(y)\mathrm{d}y,$$

其中矩阵$\Gamma(x, y; \lambda)$是对应于核矩阵$K(x, y)$的解核矩阵；2）解核矩阵$\Gamma(x, y; \lambda)$满足下列一组积分关系式

$$\Gamma(x, y; \lambda)=K(x, y)+\lambda\int_a^b K(x, t)\Gamma(t, y; \lambda)\mathrm{d}t.$$

2．假设 Fredholm 积分方程组（核矩阵$K(x, y)$和右端向量$f(x)$都是实的）

$$\varphi(x)+\int_a^b K(x, y)\varphi(y)\mathrm{d}y=f(x)$$

的齐次方程组有非零解（向量），且上列方程组是可解的．试证明：存在广义解核矩阵$\Gamma(x, y)$，向量

$$\varphi(x)=f(x)+\int_a^b \Gamma(x, y)f(y)\mathrm{d}y$$

是上列积分方程组的一个解。

第四章习题

1．问：积分方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^\pi(\sin x\cdot\sin 2s)\varphi(s)\mathrm{d}s$$

是否有特征值？

2．求下列各积分方程的特征值和特征函数：

1）$\varphi(x)=\lambda\int_0^{10} xs\varphi(s)\mathrm{d}s$；

2）$\varphi(x)=\lambda\int_0^\pi \sin x\sin s\varphi(s)\mathrm{d}s$；

3）$\varphi(x)=\lambda\int_0^1 2e^{x+s}\varphi(s)\mathrm{d}s$；

4）$\varphi(x)=\lambda\int_0^\pi \sin x\varphi(s)\mathrm{d}s$.

3. 试证明：积分方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^{1}(x^4-x^2)(4s^3+3s)\varphi(s)\mathrm{d}s$$

没有特征值.

4. 解以下各积分方程

1) $\varphi(x)=\lambda\int_0^1(xy+x^2y^2)\varphi(y)\mathrm{d}y$;

2) $\varphi(x)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}(\cos x\cos 5y+\cos 5x\cos y)\varphi(y)\mathrm{d}y$.

5. 设 $K(x, s)$ 是对称核，试证明：

1) 若 $K(x, s)\neq 0$，则它的一切 n 次迭核 $K_n(x, s)\neq 0$;

2) 若 $K(x, s)$ 不是退化核，则其 n 次迭核 $K_n(x, s)$ 也不是退化核.

6. 设 λ 是核 $K_n(x, s)$ 的一个特征值，那末 $\sqrt[n]{\lambda}$ 的 n 个不同值中至少有一个是核 $K(x, s)$ 的特征值.

7. 对称核 $K(x, s)$ 的 $2n$ 次迭核 $K_{2n}(x, s)$ 的所有特征值皆为正实数.

8. 设 $K(x, s)$ 是对称核、试证明：如果 $\varphi(x)$ 是 $K_n(x, s)$ 的任一特征函数，那末 $\varphi(x)$ 也是 $K(x, s)$ 的特征函数，或可表为 $K(x, s)$ 的两个特征函数的线性组合.

9. 设实的连续核 $K(x, s)$ 满足条件：$K(x, s)=-K(s, x)$.

1) 证明：它的所有特征值都是虚数，而特征函数不能是实值函数；

2) 讨论它的特征函数系的正交性质.

10. 对于实退化核 $K(x, s)$ 利用公式 $K(x, s)=\sum_{n=1}^{m}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(s)}{\lambda_n}$ 直接证明 Hilbert–Schmidt 定理.

11. 求方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^l K(x, s)\varphi(s)\mathrm{d}s$$

的一切特征值和特征函数，其中

$$K(x, s)=\begin{cases}\dfrac{x}{l}(l-s), & x\leqslant s;\\[2mm] \dfrac{s}{l}(l-x), & x\geqslant s.\end{cases}$$

12. 试用 Hilbert-Schmidt 公式解下列各积分方程：

1) $\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi}K(x, s)\varphi(s)\mathrm{d}s=3$,

其中 $$K(x, s)=\begin{cases}\sin x\cos s, & x\leqslant s;\\ \sin s\cos x, & x\geqslant s.\end{cases}$$

2) $\varphi(x)-\lambda\int_0^l K(x,s)\varphi(s)\mathrm{d}s=\cos\frac{\pi}{l}x$,

其中
$$K(x,s)=\begin{cases}\frac{x}{l}(l-s), & x\leqslant s;\\ \frac{s}{l}(l-x), & x\geqslant s.\end{cases}$$

13. 求积分方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1 K(x,s)\varphi(s)\mathrm{d}s,\quad K(x,s)=\begin{cases}x, & x\leqslant s;\\ s, & s\leqslant x\end{cases}$$

的所有特征值和特征函数，并解非齐次积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 K(x,s)\varphi(s)\mathrm{d}s=\cos\frac{\pi}{2}x.$$

14. 设对称核

$$K(x,s)=\begin{cases}(1-x)s, & 0\leqslant s\leqslant x\leqslant 1;\\ (1-s)x, & 0\leqslant x\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

求证
$$K(x,s)=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\pi x\cdot\sin k\pi s}{k^2\pi^2},$$

并由此推得
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

15. 设对称核

$$K(x,y)=\begin{cases}\frac{x}{2}(2-y), & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1;\\ \frac{y}{2}(2-x), & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

试用 Lagrange 方法求它的最小特征值的近似值($n=2$ 或 3)。这里，可取正交标准系为

$$\varphi_0(x)=1,\quad \varphi_k(x)=\sqrt{2}\sin k\pi x\quad (k=1,2,\cdots).$$

16. 设对称核

$$K(x,s)=\begin{cases}-\sqrt{xs}\ln s, & 0\leqslant x\leqslant s\leqslant 1;\\ -\sqrt{sx}\ln x, & 0\leqslant s\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

试求其迹 A_2, A_4, 并由此决定核的最小特征值的近似值.

第五章习题

1. 解 Fredholm 型第一种积分方程

$$\int_0^a k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y=x(a-x),$$

其中
$$k(x,y)=\begin{cases}sh(x-a)shy, & y\leqslant x;\\ shx\,sh(y-a), & x\leqslant y.\end{cases}$$

2. 讨论积分方程

$$\int_0^x \sin(x+y)\varphi(y)\mathrm{d}y = e^{2x}$$

的可解性.

3. 求解退化核积分方程

$$\int_0^1 (x-y)e^{x+y}\varphi(y)\mathrm{d}y = (x+2)e^x.$$

4. 解下列各 Volterra 型第一种积分方程:

1) $\int_0^x \sin a(x-y)\varphi(y)\mathrm{d}y = 1-\cos\beta x$ (α、$\beta\neq 0$ 都是常数);

2) $\int_0^x \sin a(x-y)\varphi(y)\mathrm{d}y = x^2$ (a 是常数);

3) $\int_0^x e^{-\beta(x-y)}\varphi(y)\mathrm{d}y = e^{\alpha x}-1$ ($\alpha>0$, $\beta>0$ 都是常数);

4) $\int_0^x e^{x-y}\varphi(y)\mathrm{d}y = f(x)$, $f(x)$ 适合条件 $f(0)=0$.

5. 试证:

1) 对称正(负)核为正(负)定核的充分和必要条件是: 它的特征函数系是完备的;

2) 若对称核 $K(x, y)$ 不是正定(或负定)的,则必存在函数 $\varphi(x)$, 使得 $(K\varphi, \varphi)=0$.

6. 求解积分方程

$$\int_0^x \varphi(y)K(x-y)\mathrm{d}y = h(x),$$

其中 $K(x)$ 是 x 的已知幂级数, $h(x)$ 是已知函数.

7. 求解积分方程

$$\int_0^x \left[a_0t^2 + a_1t(t-x) + \frac{a_2}{2}(t-x)^2\right]\varphi(t)\mathrm{d}t = x^3,$$

其中 a_0, a_1, a_2 都是常数.

8. 求积分方程

$$\int_0^x \left[f_1(x, s)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} + f_0(x, s)\varphi(s)\right]\mathrm{d}s = xF(x)$$

的解, 其中 $f_1(x, s)$, $f_0(x, s)$ 都是已知函数, $F(x)$ 也是已知的.

第六章习题

1. 解非线性积分方程

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{(1+y^2)}{1+[\varphi(y)]^2}\mathrm{d}y.$$

2. 应用逐次逼近法说明积分方程

$$\varphi(x)=\int_0^x \frac{y\varphi(y)}{[\varphi(y)]^2+1}\,dy$$

只有零解.

3. 求下列各积分方程的二次近似解:

1) $\varphi(x)=\int_0^1 (x+y)^2[\varphi(y)]^2\,dy$;

2) $\varphi(x)=x+\lambda\int_0^x [1+x\varphi(y)]^2\,dy$.

4. 求积分方程

$$\varphi(x)=\cos\pi x\int_0^1 [\varphi(y)]^2\,dy \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

的形如 $a+bx^2$ 的近似解.

5. 求积分方程

$$\varphi(x)=\sin\pi x\int_0^1 [\varphi(y)]^2\,dy \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

的形如 $ax+bx^3$ 的近似解.

6. 讨论非线性积分方程

$$\varphi(x)=1+\lambda\int_0^x \{[\varphi(y)]^{\frac{1}{2}}+y\}\,dy \quad (0\leqslant x,\ y\leqslant 1)$$

的可解性,并求其三次近似解.

7. 利用把非线性 Fredholm 积分方程化为等价的非线性微分积分方程组的初值问题的方法,讨论非线性 Fredholm 积分方程组

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b \Phi(x,\ y,\ \varphi(y))\,dy$$

的求解,这里 $\varphi(x)$ 是确定在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的 l 维未知向量,参数 $|\lambda|$ 适当小,$\Phi=(\Phi_1,\ \cdots,\ \Phi_l)$,其每个分量 $\Phi_i(x,\ y,\ \varphi_1(y),\ \cdots,\ \varphi_l(y))$ 是其所有变元的已知函数.

8. 把化非线性 Fredholm 积分方程 $\varphi(x)=\lambda\int_a^b \Phi(x,\ y,\ \varphi(y))\,dy$ 为等价的非线性微分积分方程组的初值问题的方法,推广到下列更一般形式的积分方程

$$F(\varphi(x),\ x,\ \lambda)=\lambda\int_a^b k(x,\ y,\ \varphi(y))\,dy,$$

其中 $F(u,\ x,\ \lambda)$ 和 $k(x,\ y,\ u)$ 都是其变元的已知函数,且假设 $F'_u\neq 0$.

9. 利用上两题所述方法,研究非线性 Fredholm 积分方程组

$$\Psi(x,\ \varphi(x),\ \lambda)=\lambda\int_a^b \Phi(x,\ y,\ \varphi(y))\,dy$$

的求解，其中参数 λ，向量 $\varphi(x)$ 和向量 $\Phi(x, y, \varphi(y))$ 如第 7 题所述，而 $\Psi=(\Psi_1, \cdots, \Psi_l)$ 中的每个分量 $\Psi_j(x, \varphi_1(x), \cdots, \varphi_l(x), \lambda)$ 都是其所有变元的已知函数，且假设矩阵 $\left(\frac{\partial \Psi_j}{\partial \varphi_n}\right)_{l\times l}$ 满秩.

第七章习题

1．求以常数密度 ρ_0 均匀分布在半径为 R 的球壳上的电荷所产生的电场强度及单层位势.

2．求以常数极化密度 ω_0 分布在圆盘 $z=0$, $x^2+y^2\leqslant R^2$ 上的偶极子所产生的双层位势.

3．求具有常数电荷密度 ρ_0 的单位球所产生的体位势.

4．试证明：球面是一个 Ляпунов 闭曲面.

5．设 L 是一条足够光滑的平面闭曲线．试证明：平面双层位势

$$u(M)=\int_L \tau(A)\frac{\cos(r_{AM}, n_A)}{r_{AM}}\, \mathrm{d}l_A$$

在 L 上有第一类间断点．如以 $u_I(P)$ 和 $u_E(P)$ 分别表示当点 M 从 L 的内部和外部趋于点 $P\in L$ 时上述积分的极限，以 $u(P)$ 表示上述积分当点 $M=P\in L$ 时的值，则下式成立：

$$u_I(P)=u(P)-\pi\tau(P);$$
$$u_E(P)=u(P)+\pi\tau(P).$$

6．利用平面双层位势的间断性，将求解平面 Laplace 方程的 Dirichlet 问题化为相应的积分方程.

7．利用位势理论，将上半空间区域的 Laplace 方程的 Dirichlet 问题化为积分方程，并求出此问题的解．已知在平面 $z=0$ 上的边界条件是

$$u|_{z=0}=f(x, y),\ \lim_{r\to\infty} f(x, y)=0 \quad (r^2=x^2+y^2).$$

8．假设函数 $F(x, y, z)$ 在区域 D 内具有一阶连续偏导数，试证明：积分

$$u(M)=\iiint\limits_D \frac{F(P)}{r_{MP}}\, \mathrm{d}\Omega_P$$

在区域 D 内满足方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u(M)=-4\pi F(M),$$

其中点 M 的坐标为 (x, y, z)，r_{MP} 表示点 M 和点 P 间的距离.

9．求微分方程边值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^4y}{dx^4}=f(x), & -\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2};\\
y\left(-\dfrac{1}{2}\right)=y'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=y\left(\dfrac{1}{2}\right)=y'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0.
\end{cases}
$$

的 Green 函数，并将此边值问题化为积分方程.

10. 求特征值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^4y}{dx^4}=Ay \quad (A\text{ 为参数});\\
y\left(-\dfrac{1}{2}\right)=y'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=y\left(\dfrac{1}{2}\right)=y'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0.
\end{cases}
$$

的所有特征值和特征函数，并证明特征函数全体构成完备系.

11. 将 Sturm-Liouville 问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{dy}{dx}\right)+\left(\lambda x-\dfrac{n^2}{x}\right)y=0;\\
y(0)\text{有界}, y(1)=0.
\end{cases}
$$

化为积分方程，并由此推出 n 阶 Bessel 函数 $J_n(\mu_m^{(n)}x)$ $(m=1, 2, \cdots)$ 全体构成带权 x 的正交系，这里 $\mu_m^{(n)}$ 是 n 阶 Bessel 函数 J_n 的第 m 个零点.

12. 设区域 Ω 是由 Ляпунов 闭曲面 $\partial\Omega$ 所围成的.

1) 试证明：边值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}+\lambda u=0,\\
u|_{\partial\Omega}=0.
\end{cases}
$$

的所有特征函数构成正交完备系；

2) 当区域 Ω 的界面 $\partial\Omega$ 是单位球面时，推出上列边值问题的特征函数所满足的积分方程.

附录A　线性积分方程的数值解法

考察形如

$$y(t)=f(t)+\int_a^b K(t,\ s)y(s)\mathrm{d}s \quad (a\leqslant t\leqslant b) \qquad (\mathrm{A}.1)$$

的第二种 Fredholm 积分方程，其中 $f(t)$ 是非齐次项，$K(t,\ s)$ 是方程(A.1)的核，区间 $[a,\ b]$ 是有限的，对于许多重要的实际应用，它也可被了解为二维或三维空间中的某个适当的区域．函数空间一般是取为连续函数空间 $C[a,\ b]$，或平方绝对可积空间 $L_2[a,\ b]$，它的选取取决于特定的积分方程和特定的数值解法．最常用的是采用 Lagrange 多项式内插法．这里主要介绍的就是 I. H. Sloan 在《积分方程杂志》1980 年第二卷第 3 期上发表的文章．正如作者在该文中所述的，先前比较有用的数值解法的研究结果还有 K. E. Atkinson 等人的著作，这可参阅 1980 年美国出版的 "The application and numerical solution of integral equations" 一书中的有关论文．可以说，这里介绍的内容，是关于 Fredholm 线性积分方程数值解法的新结果．

类似的方法也可应用于讨论下面的第一种 Fredholm 积分方程

$$\int_a^b K(t,\ s)y(s)\mathrm{d}s=f(t) \quad (a\leqslant t\leqslant b). \qquad (\mathrm{A}.2)$$

的数值求解(参阅《应用科学学报》, Vol. 3, No. 4, 1985)．

上述这些讨论，都是在假设方程存在唯一解的情况下进行的，同时还要求 $f(t)$、$y(t)$ 属于我们所考虑的函数空间，积分

$$Ky=\int_a^b K(t,\ s)y(s)\mathrm{d}s \quad (a\leqslant t\leqslant b)$$

也属于同一空间，并且是这个空间的线性紧算子．特别对于第一

种方程(A.2)，若算子 Ky 不是紧的，则方程(A.2)的解可能是不稳定的，因此讨论它的数值解，一般都假设在紧集上考虑才有实际意义(请参阅本书附录B).

为构造近似解的迫近格式简便起见，我们一般取有限数 a 与 b 为 $a=-1$, $b=1$，不然的话，也只要作代换

$$s=\frac{a+b+\sigma(b-a)}{2},\quad t=\frac{a+b+\tau(b-a)}{2}$$

即可达到要求.

现在我们分别介绍第二种方程和第一种方程的数值解法，应用 Lagrange 多项式内插法，构造这个近似解法的迫近格式，并从理论上证明近似解序列的收敛性和误差估计.

§1 应用多项式内插法解第二种 Fredholm 积分方程

设有第二种 Fredholm 积分方程

$$y(t)=f(t)+\int_{-1}^{1}K(t,s)y(s)\mathrm{d}s\quad(t\in[-1,1]),\tag{A.3}$$

其中非齐次项 $f(t)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的连续函数，核 $K(t,s)$ 是连续的，也可为弱奇性的.

对于弱奇性核 $K(t,s)$，通常又可以表示成

$$K(t,s)=h(t,s)m(t,s),\tag{A.4}$$

这里 $m(t,s)$ 是变量 t、$s\in[-1,1]$ 的连续函数，$h(t,s)$ 是弱奇性的，如可取为

$$\log|t-s|,\ |t-s|^{\alpha},\ \alpha>-1,\ \theta(t-s)\ \text{阶梯函数}.\tag{A.5}$$

更一般地，有

$$K(t,s)=\sum_{r=1}^{N}h_r(t,s)m_r(t,s),\tag{A.6}$$

其中 $m_r(t,s)$ 是连续函数，$h_r(t,s)$ 是弱奇性的.

假设函数 $h(t,s)$ 或更一般情形的每个函数 $h_r(t,s)$ 满足下面的两个条件：

(i) $\sup\limits_{t\in[-1,1]}\int_{-1}^{1}|h(t, s)|^p ds<\infty,\ p>1,$ (A.7)

(ii) $\lim\limits_{t\to a}\int_{-1}^{1}|h(t, s)-h(a, s)|^p ds=0,\ a\in[-1, 1].$ (A.8)

在条件(i)、(ii)下,能够证明积分算子

$$Ky(t)=\int_{-1}^{1}K(t, s)y(s)ds=\int_{-1}^{1}h(t, s)m(t, s)y(s)ds$$

在连续函数空间 $C[-1, 1]$ 中是列紧的, 即它是关于 $y\in C[-1, 1]$ 的全连续算子.

又设方程 (A.3) 的齐次方程只有零解, 这时对任意的自由端 $f(t)$, 非齐次方程(A.3)都有唯一解. 于是由(A.3)可得.

$$y=(I-K)^{-1}f,$$

其中 I 是恒等算子, $(I-K)^{-1}$ 是空间 $C[-1, 1]$ 中的线性有界算子.

现在固定 t, 引进内插多项式迫近 $m(t, s)y(s)$, 内插点取 Чебышев 点

$$s_{ni}=\cos\frac{2i-1}{2n}\pi\quad(1\leqslant i\leqslant n)\tag{A.9}$$

或

$$s_{ni}=\cos\frac{i-1}{n-1}\pi\quad(1\leqslant i\leqslant n).\tag{A.10}$$

构造迫近数列, 对给定的 $y\in C[-1, 1]$, 置 P_ny 表示级小于 n 的唯一多项式, 它满足

$$P_ny(s_{ni})=y(s_{ni})\quad(1\leqslant i\leqslant n),$$

这里 P_ny 是 Lagrange 多项式

$$P_ny(s)=\sum_{i=1}^{n}l_{ni}(s)y(s_{ni}).\tag{A.11}$$

其中

$$l_{ni}(s)=\frac{(s-s_{n1})(s-s_{n2})\cdots(s-s_{n(i-1)})(s-s_{n(i+1)})\cdots(s-s_{nn})}{(s_{ni}-s_{n1})(s_{ni}-s_{n2})\cdots(s_{ni}-s_{n(i-1)})(s_{ni}-s_{n(i+1)})\cdots(s_{ni}-s_{nn})}.$$

显见, $l_{ni}(s)$是级小于 n 的唯一多项式, 而且

$$l_{ni}(s_{nj})=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j;\\0, & i\neq j.\end{cases}$$

将以上表达式应用于方程(A.3)，把变量 t 作为参数，并记

$$b_t(s)=b(t,s)=m(t,s)y(s),$$

于是有

$$P_n b_t(s)=\sum_{i=1}^{n} I_{ni}(s)b_t(s_{ni})=\sum_{i=1}^{n} I_{ni}(s)b(t,s_{ni}) \qquad (A.12)$$

且当 $s=s_{ni}$ 时，有

$$P_n b_t(s_{ni})=b(t,s_{ni})=m(t,s_{ni})y(s_{ni}).$$

能够证明，带有核(A.4)的积分方程 (A.3) 可用下面的近似方程

$$y_n(t)=f(t)+\int_{-1}^{1} h(t,s)P_n(my_n)(s)\mathrm{d}s,\ t\in[-1,1] \qquad (A.13)$$

来迫近，且关于 t 一致地成立

$$\lim_{n\to\infty} y_n(t)=y(t),$$

这里 $y(t)$ 和 $y_n(t)$ 分别表示方程 (A.3) 和它的近似方程 (A.13) 的解.

在实际应用中，近似方程(A.13)由于(A.12)又可写成

$$y_n(t)=f(t)+\sum_{i=1}^{n} w_{ni}(t)m(t,s_{ni})y_n(s_{ni}) \quad (1\leqslant i\leqslant n), \qquad (A.14)$$

其中权

$$w_{ni}(t)=\int_{-1}^{1} h(t,s)I_{ni}(s)\mathrm{d}s \quad (1\leqslant i\leqslant n). \qquad (A.15)$$

由此可见，原方程中的被积函数 $h(t,s)$ 被适当的处理后，权可以用适当方法求得，从而，由后面的讨论可知，近似方程(A.13)就归结为一个代数方程组，从而方程(A.3)可用数值方法求得近似解.

现证收敛性定理如下：

定理 1. 若 $f(t)$ 和 $m(t,s)$ 是连续函数，且对某个 $p>1$，$h(t,s)$ 同时满足条件 (A.7) 和 (A.8)，则对足够大的 n，近似方程 (A.13)存在唯一的连续解 $y_n(t)$，且当 $n\to\infty$ 时，$y_n(t)$ 一致收敛于 $y(t)$.

证明 将近似方程(A.13)简写成

$$y_n=f+K_ny_n,\ K_ng=\int_{-1}^{1}h(t,\ s)P_n(m_tg)(s)\mathrm{d}s, \quad (\mathrm{A}.16)$$

可以证明 K_ng 是把空间 $C[-1,\ 1]$ 映照到自身的线性有界算子，而且是关于 n 的整体紧算子. 为此，我们引用一个关于平均收敛的重要结果，即对于以 Чебышев 点(A.9)或(A.10)为插值点的 Lagrange 多项式，当 $g(t)\in C[-1,\ 1]$ 时，恒有

$$\lim_{n\to\infty}\|P_ng-g\|_q=\lim_{n\to\infty}\left[\int_{-1}^{1}|P_ng(s)-g(s)|^q(1-s^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{q}}$$
$$=0, \quad (\mathrm{A}.17)$$

它对于任意正数 q 均成立. 以 $\|\cdot\|_q$ 表示带权 L_q 的模

$$\|g\|_q=\left[\int_{-1}^{1}|g(s)|^q(1-s^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{q}},$$

相应的空间记为 $C_q[-1,\ 1]$.

由此不难推出，P_ng 是一个映照 Banach 空间 $C[-1,\ 1]$ 到 $C_q[-1,\ 1]$ 的线性有界算子，故存在正常数 M，使得

$$\|P_ng\|_q\leqslant M\|g\|,\ g\in C[-1,\ 1]. \quad (\mathrm{A}.18)$$

特别当 $g(s)=b_t(s)=b(t,\ s)$，t 为第二个变量，但设 $b(t,\ s)$ 是同时关于 t、s 的连续函数，则由(A.18)得

$$\|P_nb_t\|_q\leqslant M\|b_t\|,$$
$$\sup_{t\in[-1,\ 1]}\|P_nb_t\|_q\leqslant M\|b\|, \quad (\mathrm{A}.19)$$

其中 $$\|b\|=\sup_{t\in[-1,\ 1]}\|b_t\|=\sup_{t,\ s\in[-1,\ 1]}|b(t,\ s)|.$$

另外，由(A.17)得知，对于固定的 t，有

$$\lim_{n\to\infty}\|P_nb_t-b_t\|_q=0,\ t\in[-1,\ 1]. \quad (\mathrm{A}.20)$$

现在进一步指出，(A.20)关于 t 是一致收敛的，即有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[-1,\ 1]}\|P_nb_t-b_t\|_q=0. \quad (\mathrm{A}.21)$$

这是因为

$$\|P_n(b_t-b_{t'})\|_q\leqslant M\|b_t-b_{t'}\|\leqslant M\sup_{s\in[-1,\ 1]}|b(t,\ s)-b(t',\ s)|,$$

注意到 $b(t,\ s)$ 是同时关于变量 t、s 的连续函数，故对任意的 $\varepsilon>$

0, 存在 $\delta>0$, δ 不依赖于 n, 使得对一切 t、t', 当 $|t'-t|\leqslant\delta$ 时, 有

$$\|P_n b_t - P_n b_{t'}\|_q < \varepsilon.$$

换言之, 序列 $P_n b_t$ 是一个等度连续序列, 它映照空间 $C[-1, 1]$ 到 $C_q[-1, 1]$. 我们知道, 映照一个列紧的度量空间到另一个度量空间的等度连续序列, 概收敛必定是一致收敛, 即 (A.21) 关于 t 一致地成立.

此外, 关于 $h(t, s)$ 还有这样的性质, 即有

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{|t-t'|<\delta}\int_{-1}^{1}|h(t, s)-h(t', s)|^p \mathrm{d}s=0. \tag{A.22}$$

这是因为条件 (A.7) 保证了 $h_t(s)=h(t, s)\in L_p[-1, 1]$ 对一切参数 t 均成立, h_t 表示一个空间 $[-1, 1]$ 到 $L_p[-1, 1]$ 的连续映照. 显然, 从一个紧的度量空间到另一个度量空间的连续映照必是一致连续的, 因此 (A.22) 自然成立.

以下再证明 $K_n g$ 是 $C[-1, 1]$ 上的有界紧算子. 先考虑有界性, 应用 Hölder 不等式

$$\int|ab|\,\mathrm{d}\mu\leqslant\left(\int|a|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int|b|^q\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}},$$

这里 $\mathrm{d}\mu=(1-s^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}s$, 就有

$$\begin{aligned}
\|K_n g\| &= \sup_{t\in[-1, 1]}\left|\int_{-1}^{1}h(t, s)P_n(m_t g)(s)\mathrm{d}s\right| \\
&= \sup_{t\in[-1, 1]}\left|\int_{-1}^{1}h(t, s)P_n(m_t g)(s)(1-s^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\mu\right| \\
&\leqslant \sup_{t\in[-1, 1]}\left[\int_{-1}^{1}|h(t, s)|^p(1-s^2)^{\frac{p-1}{2}}\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \left[\int_{-1}^{1}|P_n(m_t g)(s)|^q(1-s^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant A\sup_{t\in[-1, 1]}\|P_n(m_t g)\|_q,
\end{aligned} \tag{A.23}$$

其中 $$A=\sup_{t\in[-1, 1]}\left[\int_{-1}^{1}|h(t, s)|^p\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{p}}<\infty.$$

联系 (A.18) 式, 又得

$$\|K_n g\| \leqslant AM\|m\| \cdot \|g\|. \tag{A.24}$$

同样又有 $\|K_n g - Kg\| \leqslant A \sup_{t\in[-1,1]} \|P_n(m_t g) - m_t g\|_q$.

于是由 (A.21) 可知, 当 $n\to\infty$ 时, 上式右端收敛于零, 即 $K_n g$ 一致收敛于 Kg.

最后指出算子集合$\{K_n\}$是整体紧的, 即集合

$$S = \{K_n g,\ n\geqslant 1,\ g\in B\}$$

在 $C[-1, 1]$ 中有紧闭包, 其中 B 是 $C[-1, 1]$ 中的闭单位球.

事实上, 由(A.24)知, S 是整体有界的. 此外对任意的 t、$t'\in[-1, 1]$ 和 $g\in B$, 有

$$\begin{aligned}
&|K_n g(t) - K_n g(t')| \\
&= \left|\int_{-1}^{1} [h(t, s)P_n(m_t g)(s) - h(t', s)P_n(m_{t'} g)(s)]\,\mathrm{d}s\right| \\
&\leqslant \left|\int_{-1}^{1} h(t, s)[P_n(m_t g)(s) - P_n(m_{t'} g)(s)]\,\mathrm{d}s\right| \\
&\quad + \left|\int_{-1}^{1} [h(t, s) - h(t', s)]P_n(m_t g)(s)\,\mathrm{d}s\right| \\
&\leqslant A\|P_n(m_t g) - P_n(m_{t'} g)\|_q \\
&\quad + \left[\int_{-1}^{1} |h(t, s) - h(t', s)|^p\,\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{p}} \|P_n(m_t g)\|_q \\
&\leqslant AM\|m_t - m_{t'}\| + M\|m\| \left[\int_{-1}^{1} |h(t, s) - h(t', s)|^p\,\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

而上式右端是 t 的连续函数, 且在$[-1, 1]$上一致连续, 故对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, δ 与 n 无关, 使当 $|t-t'|<\delta$ 时, 有

$$|K_n g(t) - K_n g(t')| < \varepsilon,$$

即 $K_n g$ 又是整体等度连续的, 因此根据 Arzelà–Ascoli 定理, S 是紧的, 即 $K_n g$ 是整体紧算子.

基于上述结果, 必存在正整数 n_0 和正数 c, 使得对任意的 $n\geqslant n_0$, 近似方程$(A.13)$有唯一解 y_n, 并且

$$\|(I - K_n)^{-1}\| \leqslant c$$

成立. 于是由

$$y_n=f+K_ny_n,\ y=f+Ky, \tag{A.25}$$

得到

$$y_n-K_ny_n=y-Ky,$$

$$y_n=(I-K_n)^{-1}[(K_n-K)y+y-K_ny],$$

$$y_n-y=(I-K_n)^{-1}(K_n-K)y.$$

由此，有

$$\|y_n-y\|\leqslant\|(I-K_n)^{-1}\|\cdot\|K_ny-Ky\|\leqslant C\|K_ny-Ky\|, \tag{A.26}$$

因此，当 $n\to\infty$ 时，上式右端收敛于零. 定理 1 得证.

基于这个定理，我们就可以用近似方程(A.13)或(A.14)来求方程(A.3)的近似解. 自然在(A.14)右端出现的 $y_n(s_{ni})$ 预先是不知道的，但在置 $t=s_{nj}$ $(1\leqslant j\leqslant n)$ 以后，我们可得对于这些数量的一组 n 个线性代数方程

$$\sum_{i=1}^{n}[\delta_{ij}-w_{ni}(s_{nj})m(s_{nj},\ s_{ni})]y_n(s_{ni})=f(s_{nj})\quad(1\leqslant j\leqslant n). \tag{A.27}$$

上式给出了一个较方便的方法，以求近似解 $y_n(t)$ 在$[-1,\ 1]$内的任意点的值的内插公式.

权 $w_{ni}(t)$ 的决定，还可通过引进 Чебышев 多项式 $T_j(t)$，$T_j(\cos\theta)=\cos j\theta$，使得对于取内插点(A.9)，有

$$I_{ni}(s)=\frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{n-1}T_j(s)T_j(s_{ni}),$$

相应的权 $w_{ni}(t)$ 为

$$w_{ni}(t)=\frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{n-1}{}'\,a_j(t)T_j(s_{ni}), \tag{A.28}$$

这里和号 Σ' 表示在和式的第一项只取它的 $\frac{1}{2}$.

对于取内插点(A.10)，有

$$w_{ni}(t)=\frac{2\beta_{ni}}{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}{}''\,a_j(t)T_j(s_{ni}), \tag{A.29}$$

其中和号 Σ'' 表示第一项和最后一项都只取它的 $\frac{1}{2}$，且

$$\beta_{n1}=\beta_{nn}=\frac{1}{2},\ \beta_{ni}=1\ (2\leqslant i\leqslant n-1).$$

又，在这两种情形下，均有

$$a_j(t)=\int_{-1}^{1}h(t,\ s)T_j(s)\mathrm{d}s,\ (j\geqslant 0). \qquad (\mathrm{A}.30)$$

这样一来，我们可以更方便地应用多项式插值公式（A.27）来求积分方程（A.3）的数值解，且随着分点 s_{ni} 的不断增加，这近似解也愈来愈接近于真解.

§2 应用多项式内插法解第一种 Fredholm 积分方程

考察第一种 Fredholm 积分方程

$$\int_{-1}^{1}K(t,\ s)y(s)\mathrm{d}s=f(t),\ t\in[-1,\ 1], \qquad (\mathrm{A}.31)$$

这里对核 $K(t,\ s)$ 及自由端 $f(t)$ 的假设和第 1 节中的假设一样. 也可同样取内插点为 Чебышев 点（A.9）和（A.10），并引进 Lagrange 内插多项式（A.11），于是对积分方程（A.31）可以构造如下的近似解序列：

$$y_{n+1}(t)=y_n(t)+\lambda\left[f(t)-\int_{-1}^{1}K(t,\ s)y_n(s)\mathrm{d}s\right],\ \text{实数}\ \lambda\neq 0. \qquad (\mathrm{A}.32)$$

显见，若 $y_n(t)$ 一致收敛于 $y(t)$，则 $y(t)$ 便是方程（A.31）的解. 因此，我们同样可以考虑用以下的近似方程

$$y_{n+1}(t)=y_n(t)+\lambda\left[f(t)-\int_{-1}^{1}h(t,\ s)P_n(my_n)(s)\mathrm{d}s\right], \qquad (\mathrm{A}.33)$$

或

$$y_{n+1}(t)=y_n(t)+\lambda\Big[f(t)$$
$$-\int_{-1}^{1}h(t,\ s)\sum_{i=1}^{n}l_{ni}(s)m(t,\ s_{ni})y_n(s_{ni})\mathrm{d}s\Big] \qquad (\mathrm{A}.34)$$

来追近积分方程（A.31），并能证明当适当选择 λ 时，$y_n(t)$ 一致收

敛于方程(A.31)的解,即有

定理 2 若 $f(t)$ 和 $m(t, s)$ 是连续函数, $h(t, s)$ 满足条件(A.7)与(A.8), 且方程(A.31)存在唯一的连续解 $y(t)$, 则由(A.33)或(A.34)决定的近似解序列 $y_n(t)$ 按 $L_p[-1, 1]$ $(p>1)$ 的范数强收敛于 $y(t)$,特别是, 若适当地选取参数 λ, 则可使得 $y_n(t)$ 一致收敛于 $y(t)$.

证明 由上节知积分算子

$$K_n g=\int_{-1}^{1} h(t, s) P_n(m_t g)(s) \mathrm{d}s, \quad t \in [-1, 1]$$

关于 $g \in C[-1, 1]$ 是映照连续函数空间 $C[-1, 1]$ 在自身的整体紧算子, 同时可知 Kg 也是映照空间 $C[-1, 1]$ 到自身的全连续算子,且不难推出,对一切 $g(t) \in C[-1, 1]$,下式成立:

$$\lim_{n\to\infty} \| K_n g - K g \|_C = 0. \tag{A.35}$$

现在,我们将近似方程(A.33)简记为

$$y_{n+1} = y_n + \lambda(f - K_n y_n), \quad f = Ky, \tag{A.36}$$

于是有

$$(I-\lambda K_n) y_n = y_{n+1} - y + (I-\lambda K) y, \tag{A.37}$$

在上式两边作用逆算子 $(I-\lambda K_n)^{-1}$,当 n 取得足够大时,有

$$\|(I-K_n)^{-1}\|_C \leqslant M.$$

于是,由(A.37)得

$$y_n - y = (I-\lambda K_n)^{-1}(y_{n+1}-y) + (I-\lambda K_n)^{-1} \lambda (K_n - K) y, \tag{A.38}$$

进而有估计式

$$\begin{aligned} &\|(y_n - y) - (I-\lambda K_n)^{-1}(y_{n+1}-y)\|_C \\ &\quad \leqslant \|(I-\lambda K_n)^{-1}\|_C |\lambda| \cdot \|(K_n - K) y\|_C \\ &\quad \leqslant |\lambda| M \|(K_n - K) y\|_C \to 0 \quad (n\to\infty), \end{aligned}$$

或写成

$$\|y_{n+1} - y - (I-\lambda K_n)(y_n - y)\|_C \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{A.39}$$

换言之, 函数序列 $y_{n+1}(t) - y(t) - (I-\lambda K_n)(y_n(t) - y(t))$ 在 $[-1, 1]$ 上一致收敛于零

其次，证明 $y_n(t)$ 关于 n 按 c 的范数一致有界．若不然，必存在一子序列，不妨仍记为 $y_n(t)$，有 $\|y_n\|_C\to\infty$ $(n\to\infty)$．现以模 $\|y_n\|_C$ 除(A.37)的两边，得

$$\frac{y_{n+1}(t)-y_n(t)}{\|y_n\|_C}+\lambda K_n\left(\frac{y_n-y}{\|y_n\|_C}\right)\to 0 \quad (n\to\infty), \quad (A.40)$$

且关于 t 均匀地成立．记

$$g_n(t)=\frac{y_n(t)-y(t)}{\|y_n\|_C},$$

显见，$g_n(t)$ 按 c 的范数一致有界，且当 n 足够大时，存在充分小的正数 δ，使得

$$1-\delta\leqslant\|g_n\|_C\leqslant 1+\delta. \quad (A.41)$$

这样一来，g_n 是弱致密的，故存在着 g_{n_ν} 弱收敛且概收敛于 g，又因 $\{g_n\}$ 按 C 的范数一致有界，所以又推出 g_n 按 L_p 的范数强收敛，其中 p 是某个大于 1 的数．

以下进一步证明 $K_{n_\nu}g_{n_\nu}$ 一致收敛于 Kg．

我们用 $\|\cdot\|_p$ 表示函数在 $L_p[-1, 1]$ 中的模，这时有估计式

$$\begin{aligned}\|K_{n_\nu}g_{n_\nu}-Kg\|_p&\leqslant\|K_{n_\nu}g_{n_\nu}-Kg_{n_\nu}\|_p+\|Kg_{n_\nu}-Kg\|_p\\&\leqslant\|K_{n_\nu}-K\|_p\|g_{n_\nu}\|_C+\|K(g_{n_\nu}-g)\|_p.\end{aligned} \quad (A.42)$$

注意到 $\{g_{n_\nu}\}$ 的一致有界性和等式(A.35)，上式右端的第一式收敛于零，同时由于 K 是 $C[-1, 1]$ 中的紧算子，自然在 $L_p[-1, 1]$ 中也是紧的，所以当 $\|g_{n_\nu}-g\|_p\to 0$ 时，$\|K(g_{n_\nu}-g)\|_p\to 0$，即下式成立：

$$\|K_{n_\nu}g_{n_\nu}-Kg\|_p\to 0 \quad (n_\nu\to\infty).$$

又因为 K_ng_n 在 $C[-1, 1]$ 中是整体紧的，g_n 是一致有界的，故 $K_{n_\nu}g_{n_\nu}$ 在 $[-1, 1]$ 上一致收敛，但它又按 L_p 收敛于 Kg，故 $K_{n_\nu}g_{n_\nu}$ 一致收敛于 Kg．

同时注意到(A.24)和(A.33)，有

$$\|y_{n+1}\|_C\leqslant\|y_n\|_C+|\lambda|AM\|m\|\cdot\|y_n\|_C+|\lambda|\cdot\|f\|_C,$$

即
$$\|y_{n+1}\|_C\leqslant(1+|\lambda|AM\|m\|)\|y_n\|_C+|\lambda|\cdot\|f\|_C,$$

因此 $$\frac{\|y_{n_\nu+1}\|_C}{\|y_{n_\nu}\|_C}\leqslant(1+|\lambda|AM\|m\|)+\frac{|\lambda|\cdot\|f\|_C}{\|y_{n_\nu}\|_C},$$
而假设 $\|y_{n_\nu}\|_C\to\infty$，所以当 n 充分大时，有充分小的 $\delta>0$ 存在，使得

$$1-|\lambda|AM\|m\|-\delta\leqslant\frac{\|y_{n_\nu+1}\|_C}{\|y_{n_\nu}\|_C}\leqslant1+|\lambda|AM\|m\|+\delta.$$

因为，我们已设原方程存在唯一解，上式的极限同 λ 无关，即 δ 与 λ 都可取得充分小，所以

$$\lim_{n_\nu\to\infty}\frac{\|y_{n_\nu+1}\|_C}{\|y_{n_\nu}\|_C}=1. \tag{A.43}$$

由此又从(A.40)可得 $g+\lambda Kg=g$, $Kg=0$, 进而由解的唯一性知 $g(t)\equiv0$. 另外，$\|g_{n_\nu}\|_C$ 又要适合不等式 (A.41)，这是矛盾的. 它说明了 $y_n(t)$ 按 C 的范数关于 n 均匀有界. 这样又有 $y^*(t)\in L_p[-1,1]$, $y_{n_\nu}(t)$ 按 L_p 的范数强收敛于 $y^*(t)$. 于是重复上面的论证，同样可得

$$\|K_{n_\nu}y_{n_\nu}-Ky^*\|_p\to0\quad(n_\nu\to\infty).$$

于是由(A.37)，又有

$$y_{n_\nu}-\lambda K_{n_\nu}y_{n_\nu}=y_{n_\nu+1}-\lambda Ky,$$

令 $n_\nu\to\infty$，得

$$y^*-\lambda Ky^*=y^*-\lambda Ky,\ K(y^*-y)=0, \tag{A.44}$$

按假设 $Kg=0$ 仅有零解，故 $y^*(t)\equiv y(t)$.

换言之，我们证明了近似方程(A.33)或(A.34)的解 $y_n(t)$ 按 L_p 的范数强收敛于原方程(A.31)的解 $y(t)$.

最后，注意逆算子 $(I-\lambda K_n)^{-1}$ 的模的上界 M 一般又是依赖于参数 λ，不妨记为 M_λ，这时若适当选择足够小的 λ，使得

$$\|(I-\lambda K_n)^{-1}\|_C\leqslant M_\lambda,\ 0<M_\lambda<1, \tag{A.45}$$

则由(A.38)可得估计式：

$$(1-M_\lambda)\|y_n-y\|_C\leqslant M_\lambda\|y_{n+1}-y_n\|_C+|\lambda|M_\lambda\|(K_n-K)y\|_C, \tag{A.46}$$

而 $$y_{n+1}-y_n=\lambda(Ky-K_ny_n)=\lambda(f-K_ny_n),$$
且 K_ny_n 是紧的，故存在子序列 $y_{n_\nu+1}-y_{n_\nu}$ 按 C 的范数一致收敛.

根据前已证得 y_{n_ν} 按 L_p 的范数收敛，故 $y_{n_\nu+1}-y_{n_\nu}$ 一致收敛于零。于是这样又不难由(A.46)推得

$$(1-M_\lambda)\|y_{n_\nu}-y\|_C\to 0\quad (n\to\infty),$$

即

$$\|y_{n_\nu}-y\|_C\to 0\quad (n_\nu\to\infty).\tag{A.47}$$

这说明从 $\{y_n\}$ 中任取一子序列 $\{y_m\}$，必有新的子序列 $\{y_{n_\nu}\}\subset\{y_m\}$，使得 $y_{n_\nu}(t)$ 一致收敛于 $y(t)$. 换言之，列紧的连续函数序列 $\{y_n\}$ 的任意子序列都一致收敛于连续函数 $y(t)$，则 $y_n(t)$ 必一致收敛于 $y(t)$. 定理 2 证毕.

基于这一定理，我们可用追近公式

$$y_{n+1}(t)=y_n(t)+\lambda\left[f(t)-\int_{-1}^{1}h(t,\ s)\sum_{i=1}^{n}I_{ni}(s)m(t,\ s_{ni})y_n(s_{ni})\mathrm{d}s\right]\tag{A.48}$$

求第一种 Fredholm 方程(A.31)的近似解. 若将(A.48)写成

$$y_{n+1}(t)=y_n(t)+\lambda\left[f(t)-\sum_{i=1}^{n}w_{ni}(t)m(t,\ s_{ni})y_n(s_{ni})\right]\quad (1\leqslant i\leqslant n),\tag{A.49}$$

其中权 $$w_{ni}(t)=\int_{-1}^{1}h(t,\ s)I_{ni}(s)\mathrm{d}s,$$

并令 $t=s_{nj}$，则有

$$y_{n+1}(s_{nj})=y_n(s_{nj})+\lambda\left[f(s_{nj})-\sum_{i=1}^{n}w_{ni}(s_{nj})m(s_{nj},\ s_{ni})y_n(s_{ni})\right]\tag{A.50}$$

这里权的决定仍按 § 1 节的做法，通过 Чебышев 多项式 $T_j(t)$ 给出。

应用(A.49)或(A.50)，我们可以求方程(A.31)的数值解，且随着分点 s_{ni} 的增多，近似解也愈来愈接近于真解。

附录 B 第一种 Fredholm 积分方程的不适定性

§1 引 言

在不少实际问题中出现的第一种 Fredholm 积分方程

$$kg \equiv \int_a^b k(x, y)g(y)\mathrm{d}y = f(x) \quad (c \leqslant x \leqslant d) \tag{B.1}$$

是典型的不适定的一个例子. 方程(B.1)中的 $k(x, y)$ 是变量 $x(c \leqslant x \leqslant d)$ 和 $y(a \leqslant y \leqslant b)$ 的已知函数, 右端 $f(x)$ 是给定在空间 F 中的函数, 而 $g(y)$ 是空间 G 中的未知函数. 在正文第五章里, 我们已指出了, 积分方程 (B.1) 的解一般是不存在的; 即使存在, 也不一定唯一. 现在, 我们还要指出, 积分方程(B.1)的解即使存在且唯一, 但是, 一般来说, 它不具有稳定性, 即当右端函数 $f(x)$ 有微小的变化时, 相应的解不一定也是微小变化的. 例如, 假设我们是在连续函数空间 $C[a, b]$ 中求方程(B.1)的解 $g(y)$, 方程右端的偏差以空间 $L_2[c, d]$ 的模度量

$$\rho_F(f_1, f_2) = \left[\int_c^d |f_1(x) - f_2(x)|^2 \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}},$$

而对相应解的偏差按空间 $C[a, b]$ 的模度量

$$\rho_G(g_1, g_2) = \max_{y \in [a, b]} |g_1(y) - g_2(y)|, \tag{B.2}$$

这里 $g_1(y)$ 和 $g_2(y)$ 分别是方程(B.1)对应于右端 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的解. 于是, 函数

$$g_2(y) = g_1(y) + N \sin \omega y$$

是积分方程 $$\int_a^b k(x, y) g_2(y) \mathrm{d}y = f_2(x)$$

的解，这里 $f_2(x)=f_1(x)+N\int_a^b k(x, y)\sin \omega y\,\mathrm{d}y$,

而 N、ω 都是常数. 对于任意 N，当 ω 足够大时，量

$$\rho_F(f_1, f_2)=|N|\left\{\int_c^d\left[\int_a^b k(x, y)\sin \omega y\,\mathrm{d}y\right]^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{B.3}$$

可任意小，但是 $g_1(y)$ 和 $g_2(y)$ 按度量(B.2)的偏差

$$\rho_G(g_1, g_2)=\max_{y\in[a, b]}|g_1(y)-g_2(y)|=\max_{y\in[a, b]}|N\sin \omega y|=|N|$$

却可以任意大. 这里，我们是用连续函数空间 $C[a, b]$ 的度量(B.2) 来计算 $g_2(y)$ 和 $g_1(y)$ 的偏差的. 若按空间 $L_2[a, b]$ 度量

$$\rho_G(g_1, g_2)=\left\{\int_a^b|g_1(y)-g_2(y)|^2\,\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{2}}$$

来计算 $g_2(y)$ 和 $g_1(y)$ 的偏差，则有

$$\begin{aligned}\rho_G(g_1, g_2)&=|N|\left\{\int_a^b\sin^2\omega y\,\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{2}}\\&=|N|\left\{\frac{b-a}{2}-\frac{1}{2\omega}\sin\omega(b-a)\cos\omega(b+a)\right\}^{\frac{1}{2}},\end{aligned} \tag{B.4}$$

因之，常数 N 和 ω 可如此选取，使 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的偏差(B.3)不管如何小，按上式(B.4)计算得到的相应解 $g_1(y)$ 和 $g_2(y)$ 的偏差可以任意大小.

但是，对方程(B.1)的解的稳定性应该满足，这是由方程所描述的物理现象的本性所决定的. 否则，如果原始资料 $f(x)$ 不论变化多么小，其相应的解 $g(y)$ 却有很大的变化. 那末，这个物理问题的解还有什么物理意义呢? 在方程(B.1)中，右端函数 $f(x)$ 是由所描述的物理现象的原始资料所决定的，它一般是由实验测定到的，记为 $f_1(x)$，$f_1(x)$ 同精确值 $f_T(x)$ 可以相当(在某种度量意义下)接近，因此，能否以方程

$$kg=f_1(x) \tag{B.5}$$

的解 $g_1(y)$ 作为方程

$$kg_T=f_T(x)$$

的(精确)解 $g_T(y)$ 的近似值?这里,就产生了如下两个方面的问题有待我们考虑:其一,要方程(B.5)有解,只有在 $f_1(x)\in kG$ 时才有可能.如果方程(B.5)中的 $k(x, y)$ 关于 x 连续,且有连续导数 $\frac{\partial k}{\partial x}$,而所测量到的 $f_1(x)$ 仅是连续函数,它在某些点无导数,则方程(B.5)在经典意义下就不可解.这样,我们必须把方程(B.5)的解的概念进行扩充,而引进某种适宜的广义解.因此,我们要考虑的一个方面的问题是:怎样来理解近似解?其二,这种近似解的理解,也即在引进方程(B.5)的广义解的时候,必须要考虑到解的算法应该保证在原始资料 $f(x)$ 变化不大的情况下,相应的解能具有稳定的特性.这是我们要考虑的又一方面的问题.

下面,考虑算子方程

$$kg=f, \tag{B.6}$$

其中元素 f 在空间 F 内,是已知的,待定的元素 g 在空间 G 内,k 是一个算子.积分方程(B.1)是线性积分算子的情形.

定义 1 设 F 和 G 都是度量空间.方程(B.6)在空间 G 内的广义解是指 G 中的这样的元素 $\tilde{g}$,它使泛函 $\rho_F(kg, f)$ 达到下确界

$$\rho_F(k\tilde{g}, f)=\inf_{g\in G}\rho_F(kg, f),$$

这里 ρ_F 表示空间 F 的变量.

在这里,如果当 $f=f_1$ 时方程(B.6)有通常意义下的(经典)解 $g_1\in G$,那末显然,它与方程 $kg=f_1$ 的广义解是一致的,且有

$$\rho_F(kg_1, f_1)=0.$$

定义 2 设对每个元素 $f\in F$,方程(B.6)在空间 G 中存在唯一的解 $g=S(F)$ 与之对应.如果对于任意 $\varepsilon>0$,皆存在 $\delta(\varepsilon)>0$,只要 $\rho_F(f_1, f_2)<\delta(\varepsilon)$,就有

$$\rho_G(g_1, g_2)<\varepsilon,$$

这里 $g_1=S(f_1)$,$g_2=S(f_2)$,f_1、$f_2\in F$,g_1、$g_2\in G$,而 ρ_G 表示空间 G 的度量,我们就说,方程(B.6)在空间 G 内按原始资料 $f\in F$

确定的解 $g=S(f)$ 在空间对 (G, F) 上稳定.

空间 F 和 G 的度量在这里是作为描述空间 F 和 G 的邻域的一种表达方式,用来反映元素的邻近程度. 按上面的定义 2, 在此指出,稳定性的要求是同空间的"度量"有关的,同一个问题在这个"度量"中是稳定的,在那种"度量"中可能不稳定.例如,设 $f(x)$ 为近似已知,记为 $f_1(x)$, $x\in[a, b]$,求其导数.设 $g_1(x)$ 是 $f_1(x)$ 的导函数,对任意常数 ω,函数 $f_2(x)=f_1(x)+N\sin\omega x$ 按 C 度量 (B.2) 与 $f_1(x)$ 相差 $|N|$, 但导函数 $g_2(x)=f_2'(x)$ 和 $g_1(x)$ 在 C 度量下相差 $|N\omega|$, 它当 ω 充分大时可以任意大. 因此,这个问题在 C 度量下是不稳定的. 如果 F 是区间 $[a, b]$ 上连续可微函数的集合,其度量取为

$$\rho_F(f_1, f_2)=\sup_{x\in[a, b]}\{|f_1(x)-f_2(x)| + |f_1'(x)-f_2'(x)|\},$$

而 G 中元素 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 仍采用 C 度量, 则这个问题就是稳定的了.

假设已知方程 (B,6) 的精确右端 f 的近似元素 $\tilde{f}$, $\rho_F(f, \tilde{f})\leqslant\delta$, 自然, 我们在满足条件 $\rho_F(kg, \tilde{f})\leqslant\delta$ 的元素 g 的集合 $G_\delta\subseteq G$ 中求方程 (B.6) 的近似解. 但是, 正如我们在本附录一开头的例子中所指出的那样,在许多情况下,这个元素集合 G_δ 太大了,以至在这些元素中有这样一些元素, 它们彼此间(在空间 G 的度量下)可以相差很大.因此,不是集合 G_δ 的所有元素都可取为方程(B.6)的近似解的.

这样, 如何选择方程(B.6)的可能解就成为必需的了. 通常, 是利用关于解的已有补充信息, 这种信息具有定量的或定性的性质. 在前一种情形, 具有定量性质的补充信息使我们得以缩小可能解类,例如缩小到致密集,使问题的解对原始资料改变不大的情况下成为稳定的. 在后一种情形,利用关于问题的解的定性性质,例如关于解的光滑性信息, 来寻求方程对原始资料改变不大的情况下是稳定的近似解.

§2 选 择 法

假设 F 和 G 都是度量空间. 讨论算子方程

$$kg=f \tag{B.7}$$

的求解,式中 $f\in F$, $g\in G$,算子 k 把 G 映射到 F 上. 又假设,存在逆算子 k^{-1},一般来说,它不是连续的.

选择法是近似求解方程 (B.7) 的一种广泛采用的方法, 其法是:对于某个预先可给定的可能解的子类 M ($M\subset G$) 中的元素 g, 计算出 kg,在集M内取这样一个元素 g_0 作为近似解, 使在集M上偏差 $\rho_F(kg, f)$ 达最小值,也就是

$$\rho_F(kg_0, f)=\inf_{g\in M}\rho_F(kg, f).$$

显然, 如果方程 (B.7) 的未知精确解 $g_T\in M$, 则就有 $\inf\limits_{g\in M}\rho_F(kg, f)=0$,且在精确解 g_T 上,达到此下限. 如果方程(B.7)有唯一的解,则使 $\rho_F(kg, f)$ 极小化的元素 g_0 就能唯一确定出来.

但是在实际上, 偏差 $\rho_F(kg, f)$ 的极小值是近似求的, 因此, 选择法的一个重要问题是: 设 $\{g_n\}$ 为元素序列, 当 $n\to\infty$ 时, $\rho_F(kg_n, f)\to 0$, 问 $\rho_G(g_n, g_T)\to 0$ 是否成立?也就是说,我们希望选择法是稳定的. 为此,我们引进下述拓扑学中的一个结论.

引理 设度量空间 G_0 的紧集 G 映射在度量空间 F_0 的集 F 上, 若此映射 $G\to F$ 是连续的, 且相互均为单值, 则逆映射 $F\to G$ 也是连续的.

证 设元素 $g\in G$,元素 $f\in F$,函数 $f=\varphi(g)$ 实现正映射 $G\to F$,而函数 $g=\psi(f)$ 实现逆映射 $F\to G$.

任取元素 $f_0\in F$, 我们要证明 $\psi(f)$ 在 f_0 处是连续的. 用反证法: 假设不然,即 $\psi(f)$ 在 f_0 处不连续,则存在这样一个数 $\varepsilon_1>0$,使得对一切 $\delta>0$, 都可求得 F 中的元素 $\tilde{f}$, 虽然 $\rho_F(\tilde{f}, f_0)<\delta$, 而有 $\rho_G(\tilde{g}, g_0)\geqslant\varepsilon_1$, 这里 $\tilde{g}=\psi(\tilde{f})$, $g_0=\psi(f_0)$.

取正数列 $\{\delta_n\}$, $\delta_n\to 0$ $(n\to\infty)$. 对每个 δ_n, 可求得元素

$\tilde{f}_n\in F$，使得 $\rho_F(\tilde{f}_n, f_0)<\delta_n$，$\rho_G(\tilde{g}_n, g_0)\geqslant\varepsilon_1$，其中 $\tilde{g}_n=\psi(\tilde{f}_n)$．显然，有 $\tilde{f}_n\to f_0(n\to\infty)$．

因为 G 是致密集，所有 $\tilde{g}_n\in G$，于是可从序列 $\{\tilde{g}_n\}$ 中选出收敛到某个元素 $\tilde{g}_0$ 的子序列 $\{\tilde{g}_{n_k}\}$．又由于 G 是闭集，所以 $\tilde{g}_0\in G$．再由于 $\rho_G(\tilde{g}_{n_k}, g_0)\geqslant\varepsilon_1$，所以 $\tilde{g}_0\neq g_0$．

子序列$\{\tilde{g}_{n_k}\}$对应于集合 F 内的元素序列 $\{\tilde{f}_{n_k}\}$，$\tilde{f}_{n_k}=\varphi(\tilde{g}_{n_k})$．按引理假设，映射 φ 连续，所以 $\tilde{f}_{n_k}$ 收敛于元素 $\tilde{f}_0=\varphi(\tilde{g}_0)$，且$\{\tilde{f}_{n_k}\}$是序列 $\{\tilde{f}_n\}$ 的子序列．又因为序列 $\{\tilde{f}_n\}$ 收敛到元素 $f_0=\varphi(g_0)$，于是

$$\tilde{f}_0=\varphi(\tilde{g}_0)=f_0=\varphi(g_0).$$

再按引理假设，映射 $G\to F$ 是相互单值的，所以必有 $\tilde{g}_0=g_0$．

这与原先已证得的不等式 $\tilde{g}_0\neq g_0$ 相矛盾．引理证毕．

这样，选择法中的极小化序列 $\{g_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限与 g_T 相重合，只要 1) g_T 属于可能解类 M；2) 集合 M 是紧的．

但是，由于原始资料 f 有误差，因之，元素 f 可能不属于集 kM，在这种情况下，方程 (B.7) 就可能没有(经典)解．在实际问题中，常常是用已知的右端近似值 $\tilde{f}$ 来代替精确值 f_T，通常又没有使我们能确定元素 $\tilde{f}$ 是否属于集 kM 的有效准则，此 $\tilde{f}$ 可能不属于集 kM，在这种情况下，$k^{-1}\tilde{f}$ 可能没有意义．

为了克服这个困难，我们引进方程(B.7)的广义解的概念：设 k 是全连续算子．对于给定的元素 $f\in F$，在集合 M 上使泛函 $\rho_F(kg, f)$ 取极小的元素 $\tilde{g}\in M$，称为方程(B.7)在M上的广义解

$$\rho_F(k\tilde{g}, f)=\inf_{g\in M}\rho_F(kg, f).$$

如果M是紧集，则对任意的 $f\in F$，方程(B.7)都有广义解．如果 $f\in kM$，则广义解 $\tilde{g}$ 与方程(B.7)的普通解是一致的．如果广义解不只是一个，就把广义解集 D 中的任一元素都视为是广义解．

下面建立使广义解是唯一的，并且连续依赖于右端 f 的某些充分性条件．

定义3 设元素 z 和集 Q 属于空间 F. 元素 $q\in Q$ 称为元素 z 在集 Q 上的投影，记它为 $q=Pz$，如果满足等式

$$\rho_F(z,\ q)=\rho_F(z,\ Q),$$

这里 $\rho_F(z,\ Q)=\inf\limits_{h\in Q}\rho_F(z,\ h)$.

现在证明

定理1 如果方程(B.7)在紧集M上只有一个解，并且每个元素 $f\in F$ 在集 kM 上的投影是唯一的，则方程(B.7)的广义解就是唯一的，而且它连续依赖于右端 f.

证 设 $\tilde{g}$ 为广义解，记 $\tilde{f}=k\tilde{g}$. 显然，$\tilde{f}$ 是元素 f 对集 kM 的投影，$\tilde{f}=Pf$. 按照定理的条件，它是单值确定的. 因此，由于集M到集 kM 上的映射互为单值，于是广义解 $\tilde{g}$ 就是唯一的了.

因为 $\tilde{g}=k^{-1}\tilde{f}=k^{-1}Pf$，由引理，逆算子 k^{-1} 在 kM 上是连续的，而投影算子 P 对 F 又是连续的，所以算子 $k^{-1}P$ 是对 f 连续的，即广义解 $\tilde{g}$ 连续依赖于右端 f. 定理证毕.

这个结果表明，对紧集M求方程(B.7)的广义解的问题，是适定的.

对于方程(B.1)，算子 k 是线性的，还有下面的

定理2 设方程(B.7)是线性的. 假设齐次方程 $kg=0$ 只有零解，集M是凸的，又空间 F 内的所有球面都是严格凸的. 则方程(B.7)在紧集M上的广义解是唯一的，而且它连续依赖于右端 f.

证 设 $\tilde{g}$ 为广义解，且记 $\tilde{f}=k\tilde{g}$. 因为集M是凸的，又由于算子 k 是线性的，因之，集 kM 也是凸的. 显然，$\tilde{f}$ 是元素 f 对集 kM 的投影，按定理的条件，空间 F 的球面是严格凸的，因之，投影 $\tilde{f}$ 是单值确定的. 这样，即可按照定理1的证明那样来完成本定理的证明了.

上述求方程(B.7)的广义解是在无限维空间中进行的，为了近似求广义解，自然转向有限维空间. 下面，仍假设 k 是全连续算子，并认为上面定理中所指出的在给定集M上存在唯一广义解的充分条件满足.

设 $M_1\subset M_2\subset\cdots\subset M_n\subset\cdots$ 是紧集 M_n 的增长链，它们的联合

$\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ 的闭包与紧集M一致. 在每个集 M_n 上都有方程(B.7)的广义解, 但它可能不是唯一的, 以 T_n 表示集 M_n 上所有广义解的集合.

我们要指出, 可以在 T_n 中任取一个元素 $\tilde{g}_n$ 作为集M上的广义解 $\tilde{g}$ 的近似值, 即有

$$\lim_{n\to\infty} \rho_G(\tilde{g}_n, \tilde{g}) = 0. \tag{B.8}$$

令 B_n 是元素 f 在集 kM_n 上的投影集合, 显然 $B_n = kT_n$, 且 $kM_1 \subseteq kM_2 \subseteq \cdots \subseteq kM_n \subseteq \cdots$, 于是

$$\begin{aligned}\rho_F(f, kM_1) \geqslant \rho_F(f, kM_2) \geqslant \cdots \geqslant \rho_F(f, kM_n) \geqslant \cdots \\ \geqslant \rho_F(f, kM) = \rho_F(f, k\tilde{g}).\end{aligned} \tag{B.9}$$

因为集 $\bigcup_{n=1}^{\infty} kM_n$ 在 kM 上处处稠密, 所以对于任意的数 $\varepsilon > 0$, 可以求出这样的正数 $n_0(\varepsilon)$, 使对所有的 $n > n_0(\varepsilon)$, 有

$$\rho_F(f, kM_n) < \rho_F(f, kM) + \varepsilon. \tag{B.10}$$

由(B.9)和(B.10), 立即可得

$$\lim_{n\to\infty} \rho_F(f, kM_n) = \rho_F(f, kM)$$

又因为 $\rho_F(f, kM_n) = \rho_F(f, B_n)$, 所以

$$\lim_{n\to\infty} \rho_F(f, B_n) = \rho_F(f, k\tilde{g}). \tag{B.11}$$

每个集 B_n 都是紧的, 因为它是紧集 kM_n 的闭子集, 所以在集 B_n 内取元素 z_n, 使

$$\rho_F(z_n, f) = \inf_{z \in B_n} \rho_F(z, f).$$

kM 是紧集, 所以序列 $\{z_n\}$ 至少有一个属于 kM 的极限点. 设点 z_0 是集 $\{z_n\}$ 的任意一个极限点, $\{z_{n_k}\}$ 是收敛于 z_0 的序列 $\{z_n\}$ 的子序列, 即 $\lim_{n_k\to\infty} \rho_F(z_{n_k}, z_0) = 0$. 这样, 由(B.10)与(B.11)可以知道

$$\begin{aligned}\rho_F(f, z_0) &= \lim_{n_k\to\infty} \rho_F(f, z_{n_k}) = \lim_{n_k\to\infty} \rho_F(f, B_{n_k}) \\ &= \rho_F(f, k\tilde{g}) = \rho_F(f, kM),\end{aligned}$$

于是

$$\rho_F(f, z_0) = \rho_F(f, kM).$$

由此及集M上广义解的唯一性，就得出

$$z_0 = k\tilde{g}.$$

又因为 z_0 是集 $\{z_n\}$ 的任一极限点，于是序列 $\{z_n\}$ 收敛于 $k\tilde{g}$. 这也就是说，可由集 T_n 取任一元素 $\tilde{g}_n$ 作为广义解的近似值，因为按上面的引理可知道，当 $n\to\infty$ 时，$\tilde{g}_n\to\tilde{g}$. 这样，等式(B.8)即得证.

如果我们取 M_n 为(有限)n维集，则在紧集M上近似求广义解的问题就归结为求集 M_n 上的泛函 $\rho_F(kg, f)$ 的极小值，即求 n 个变量的函数的极小值.

§3 正 则 法

如果方程

$$kg = f \tag{B.12}$$

的可能解类M不是紧集，而且与右端f的近似特性相联系的变化可能越出集 kM，这时，就得另外寻找求方程的解的方法，使之能得出方程(B.12)在原始资料变化不大的情况下是稳定的解.

设方程(B.12)的可能解集 G 不是紧的，算子 k 的逆算子 k^{-1} 在集 kG 上不连续. 取 $f_\delta\in F$，它与精确值 f_T 的偏差不大于 δ，$\rho_F(f_\delta, f_T)\leqslant\delta$，这时，不宜按公式 $g_\delta=k^{-1}f_\delta$ 来作为右端为 f_δ 的方程的解. 由于数 δ 表征着右端的误差，所以我们借助与此参数 δ 有关的算子来确定 g_δ 就较自然了. 当 $\delta\to0$，也即在度量空间 F 内，$f_\delta\to f_T$ 时，要求近似解 g_δ 在度量空间 G 内趋于 g_T，这里 $g_T\in G$ 是方程 $kg=f_T$ 所要求的精确解.

定义 4 如果依赖于参数 α 的算子 $R(f, \alpha)$ 具有下列特性，就称它是在 $f=f_T$ 邻域内对于方程(B.12)的正则算子：

1) 存在这样的数 $\delta_1>0$，使算子 $R(f, \alpha)$对所有的 $\alpha>0$ 和满足 $\rho_F(f, f_T)\leqslant\delta\leqslant\delta_1$ 的任一 $f\in F$ 有定义；

2) 存在这样的函数 $\alpha=\alpha(\delta)$，对任一 $\varepsilon>0$，存在正数 $\delta(\varepsilon)\leqslant\delta_1$，使得只要 $\rho_F(f_T, f_\delta)\leqslant\delta(\varepsilon)$，$f_\delta\in F$，就有 $\rho_G(g_T, g_\alpha)\leqslant\varepsilon$，这里

$g_\alpha = R(f_\delta, \alpha(\delta))$.

在这个定义中，未假定算子 $R(f, \alpha)$ 的单值性，而且函数 $\alpha = \alpha(\delta)$ 也应与 f_δ 有关.

如果 $\rho_F(f_T, f_\delta) \leqslant \delta$，则可取元素 $g_\alpha = R(f_\delta, \alpha)$ 作为方程 $kg = f_T$ 的近似解，这个解称为方程(B.12)的**正则解**，数 $\alpha = \alpha(\delta, f_\delta)$ 称为**正则参数**. 正则算子和符合于原始资料精度 δ 的正则参数 $\alpha(\delta)$ 的选择，这两者一起决定着近似构造方程 (B.12) 的稳定解. 如果已知 $\rho_F(f_T, f_\delta) \leqslant \delta$，则由正则算子的定义，可以如此选择正则参数 $\alpha(\delta)$，使得当 $\delta \to 0$ 时，正则解 $g_\alpha = R(f_\delta, \alpha(\delta))$ 趋近于(在度量空间 G 内)所要求的精确解 g_T，即 $\rho_G(g_T, g_\alpha) \to 0$.

于是，求方程(B.12)关于右端改变不大时是稳定的近似解归结为：1) 求正则算子；2) 根据某些补充信息(例如，根据和右端 f_δ 一起给定的误差值 δ) 来确定正则参数 α. 这种构造近似解的方法就称为**正则法**.

构造方程(B.12)的正则算子的一种方法，是建立在变分原理的基础上的. 还有其它一些方法来构成正则算子，例如，基于利用算子 k 的谱的方法. 关于正则参数的确定，也有各种求法. 要知详情，可参阅 D. L. Phillips 的论文 "A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind" (J. Assoc. Comput. Mach. **9**, 1, 1962)，也可参阅 **А. Н. Тихонов**, В. Я. Арсенин 的专著"Методы Решения Некорректных Задач", «Наука», М., 1977 (1974 年俄文第一版，有英译本，也有中译本：地质出版社，1979 年)，在这本专著后面收集了大量的参考文献，此书的第二章是讲述正则法的，内容较丰富. 还可参阅 1980 年美国出版的论文集 "The application and numerical solution of integral equations" 中的有关论文，特别是 F. R. de Hoog 的文章"Review of Fredholm equations of the first kind" (此书的 119～134 页) 和 M. A. Lukas 的文章 "Regularization" (此书的 151～182 页)，在这些论文后面，提供了若干有关正则法的进一步研究成果.

参 考 文 献

[1] I. Fredholm, Sur une nouvelle méthode pour la resolution du problème de Dirichlet, Övers Vet-Ak. Stockholm, 1900.

[2] I. Fredholm, Sur une classe d'équation fonctionnelle, Acta Mathematica, 27, 1903.

[3] D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Therie der linearen Integralgleichungen, 1912.

[4] H. Poincaré, Lecons de mécanique céleste, Vol. III, Paris, 1910.

[5] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике, Изд. 3-е, М. «Наука», 1968. (第二版有中译本:《奇异积分方程.函数论边值问题及其在数学物理中的某些应用》,朱季纳译,上海科学技术出版社,1966.)

[6] С. Г. Михлин, Интегральные уравнения и их приложéния к некоторым, проблемам механики, математической физики и техники, Гостехиздат, 1949 (中译本:《积分方程论及其应用》,陈传璋、卢鹤绂译,商务印书馆,1955.)

[7] A. G. Ramm, Theory and applications of some new classes of integral equations, Springer-Verlag, New York, Heidelberg Berlin, 1980.

[8] A. T. Lonseth, Sources and applications of integral equations, SIAM Review, Vol. 19. No 2, 1977. (中译文:《积分方程的来源及应用》,吕慧芳译,侯宗义校,应用数学与计算数学,1981, No. 5, No. 6.)

[9] W. Pogorzelski, Integral equations and their applications, Vol. I, Pwn-Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1966.

[10] L. G. Chambers, Integral equations: A shord course, Internat. Textbook Company Limited, 1976.

[11] 陈传璋、侯宗义:《一阶椭圆型方程组的黎曼——哈斯曼边值问题》,复旦大学学报(自然科学版),1962, No. 1.

[12] 侯宗义:《一阶椭圆型方程组的黎曼——哈斯曼型边值问题的奇异情形》,数学学报,第23卷,No. 3, 1980.

[13] 李明忠:《一类非线性积分方程的特征值存在定理》,复旦学报(自然科学版),1960, No. 2.

[14] F. E. Browder, Nonlinear functional analysis and nonlinear integral equations of Hammerstein and Urysohn type, Contribution to nonlinear functional analysis E. Zarantonello (editor), Academic Press, New York, 1971.

[15] H. Brezis, F. E. Browder, Theorems for nonlinear integral equations of Hammerstein type, Bull. Amer. Math. Soc., 81, No. 1, 1975.

[16] 郭大钧:«Hammerstein 型非线性积分方程的固有值»,数学学报,第 20 卷,No 2, 1977.

[17] 侯宗义:«一类高阶非线性椭圆型方程的边值问题»,复旦学报(自然科学版),1979, No 4.

[18] H. H. Kagiwada, R. E. Kalaba, Extension of S. L. Sobolev's initial value method to nonlinear integral equations, J. Nonlinear Analysis, Vol. 2, No 2, 1978,

[19] V. Lakshimikantham, N. E. Lord, Sobolev type differential equations Appl. Math. Comput., Vol, 4, No. 2, 1978.

[20] H.H. Kagiwada, R. E. Kalaba, An initial value Method for the nonlinear integral equation $F(u(t),\ t,\ \lambda)=\lambda\int_0^1 k(t,\ y,\ u(y))dy$, Appl. Math. Comput., Vol. 13, No. 1.2, 1983.

[21] 侯宗义:«非线性Fredholm积分方程组的参数嵌入方法»,科学通报,第 28 卷,No 4, 1983.

[22] 侯宗义:«解非线性积分方程组的嵌入方法的推广»,科学通报,第 29 卷,No 12 1984.

[23] C. Miranda, Partial differential equations of elliptic type, Springer-Verolag, Berlin, Heidelberg, New York, 1970.

[24] 复旦大学数学系主编:«数学物理方程»,人民教育出版社 1979.

[25] R. Courant, D. Hilbert. Methods of mathematical physics, II, Interscience, New York, 1962.(中译本:«数学物理方法»,卷 II,熊振翔、杨应辰译,科学出版社,1977.)

[26] И. Н. Векуа, Новые Методы решения эллиптических уравнений, М.-Л. 1948 (中译本:«椭圆型方程新解法»,侯宗义译,陈传璋校,上海科学技术出版社 1963.)

[27] R. P. Gilbert, Function theoretic methods in partial differential equations Academic Press, New York, 1969.(中译本:«偏微分方程的函数论方法»,侯宗义、李明忠、徐振远译,陈传璋校,高等教育出版社,1984.)

[28] В. З. Партон, П. И. Перлин, Интегральные уравнения теории упругости «Наука», 1977.

[29] W. L Wendland, Elliptic systems in the plane, π Pitman, London, San Francisco, Melbourne, 1979.

[30] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математический физики «Наука»,М., 1972(第二版有中译本:«数学物理方程»,黄克欧等译,黄寿恒等校,高等教育出版社,1957.)

[31] I. Stakgold, Green's functions and boundary value problems, John Wiley and Sons, New York. Chichester·Brisbane·Toronto, 1979.

[32] W. T. Reid, Sturmian theory for ordinary differential equations Springer-Veilag, New York, Heidelberg, Berlin, 1980.